多変数モジュラー形式の p 進的性質について

菊田 俊幸 (近畿大学)

序

論文 [22] の中で, Serre は p 進モジュラー形式の概念を定義し, これを総実体上の p 進ゼータ関数の構成に応用した. その後 Katz, 肥田, Wiles など様々な人達により, 各々の p 進モジュラー形式の理論が展開された. 最近になり Serre 流の p 進モジュラー形式の定義が Siegel モジュラー形式の場合に拡張され, その性質が明らかにされつつある. 本稿ではこれらの結果を紹介する.

1 Serre の p 進モジュラー形式

この節では Serre [22] による p 進モジュラー形式に関する結果を紹介する. 最初にいくつか記号の説明をしておく.

自然数 N に対して,

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

と定義する. 自然数 k に対して, χ を mod N の Dirichlet 指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ を満たすものとする. このとき重さ k, 指標 χ の $\Gamma_0(N)$ に対するモジュラー形式全体の空間を $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ で表すことにする. さらに部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して, $M_k(\Gamma_0(N), \chi)_R$ を $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ の元であって Fourier 係数が全て R に含まれるようなもの全体からなる R 加群とする. いずれの場合も χ が自明指標のときは χ を省略して書く. p を素数とし, ord_p を $\mathbb{Q}_p$ 上の正規化された加法付値とする.

定義 1.1. p 進体 $\mathbb{Q}_p$ 上に係数をもつような不定元 q の形式的ベキ級数 $g = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n \in \mathbb{Q}_p[\![q]\!]$ を考える. g が p **進モジュラー形式**であるとは, ある $SL_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式からなる列 $\{f_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f_m}(n)q^n \in M_{k_m}(SL_2(\mathbb{Z}))_{\mathbb{Q}}\}$ が存在して, k_m は増大し

$$\lim_{m\to\infty} f_m = g \quad (p \text{ 進極限})$$

となることである. ここで $\lim_{m\to\infty} f_m = g$ (p 進極限) は, $m \to \infty$ のとき $\inf_{n\geq 0}\{\mathrm{ord}_p(a_{f_m}(n) - b(n))\} \to \infty$ となるという意味である.

p 進モジュラー形式の例を述べる. モジュラー形式の例としてよく知られた, 重さ k (≥ 4) の Eisenstein 級数の q-展開

$$E_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{0<d|n} d^{k-1} \right) q^n$$

を考える.

例 1.2. $k \geq 2$ を偶数とし, p を奇素数とする．このとき数列 $\{k_m\}$ を $k_m := k + (p-1)p^{m-1}$ で定義する．重さ k_m に対応する Eisenstein 級数の列は p 進極限

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m} = (1-p^{k-1})\frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}} d^{k-1}\right) q^n \in \mathbb{Q}[\![q]\!]$$

をもつ．したがって右辺の形式的ベキ級数は p 進モジュラー形式である．

例 1.2 の証明．定数項については, $k_m \equiv k \bmod (p-1)p^{m-1}$ であるから, Kummer の合同式を用いると

$$\frac{B_{k_m}}{2_{k_m}} \equiv (1-p^{k_m-1})\frac{B_{k_m}}{2_{k_m}} \equiv (1-p^{k-1})\frac{B_k}{2_k} \bmod p^m.$$

ただし一つ目の合同式は $k_m > m$ から得られる．定数項以外については Euler による合同を用いると

$$d^{k_m-1} \equiv \begin{cases} d^{k-1} & p \nmid d \text{ のとき} \\ 0 & p \mid d \text{ のとき} \end{cases} \bmod p^m$$

が得られる．これらを併せると

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m} = (1-p^{k-1})\frac{-B_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}} d^{k-1}\right) q^n$$

となる． □

ここで例で与えた極限の右辺の級数に注目してみるとレベル p の Hecke の Eisenstien 級数の形をしていることがわかる．すなわち

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m} = \text{Hecke の Eisenstein 級数}$$

が得られた訳である．これは Eisenstein 級数の p 進極限を取った結果, 再び本当のモジュラー形式になったということを意味している．Serre はこの現象を次のように, より一般的な形で述べている．

p 進ウェイトの群 $\boldsymbol{X}$ なるものが次のように定義される:

$$\boldsymbol{X} := \varprojlim \mathbb{Z}/(p-1)p^{m-1}\mathbb{Z} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & p \geq 3 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}_2 & p = 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

このとき, 埋め込み

$$\mathbb{Z} \ni n \longmapsto (n, \widetilde{n}) \in \boldsymbol{X}$$

によって $\mathbb{Z}$ は $\boldsymbol{X}$ の部分集合とみなせる．ここで $\widetilde{n} := n \bmod p-1$ である．

定理 1.3. (1) k を自然数とする．数列 $\{k_m\}$ を通常の距離では増大し, $\boldsymbol{X}$ の中では (k,α) (k は自然数であることから $(k,\alpha) \neq (0,0)$) に収束するものとする．このとき

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m} = \text{重さ } k,\ \text{レベル } p,\ \text{指標 } \chi \text{ の Hecke の Eisenstein 級数}$$

となる．ただし指標 χ は (k,α) によって定まる．
(2) 増大列 $\{k_m\}$ が $\boldsymbol{X}$ の中で $(0,0)$ に収束するなら

$$\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{2k_m}{B_{k_m}} E_{k_m}\right) = 1$$

となる．

注意 1.4. (1) の主張はやや正確ではない. 厳密には "$\mathbb{Q}_p$ の中の 1 の $p-1$ 乗根を $\mathbb{C}$ の中のものと同一視すれば" ということである.

(2) は全ての定数が p 進モジュラー形式であることを意味している. 定数だけでなく, 通常の $SL_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式 f を (2) の極限の両辺に掛ければ f も p 進モジュラー形式であることがわかる. したがって p 進モジュラー形式とは, 定数および通常のモジュラー形式を含む概念である. 特に Eisenstien 級数の極限からなる p 進モジュラー形式は p **進 Eisenstein 級数**と呼ばれる.

さて, Eisenstein 級数の p 進極限がいつもレベル p のモジュラー形式になることを述べたが, 逆にレベル p のモジュラー形式はいつ p 進モジュラーになるだろうか. Serre はこれについても以下のように述べている.

定理 1.5. 全ての $f \in M_k(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Q}}$ は p 進モジュラー形式である.

この定理の証明には触れないが, 証明の中で特に f の重さが 2 の場合には, 一次近似を取ることで次の合同関係が得られる. この合同関係は $\Gamma_0(p)$ の種数の計算に応用された重要なものである.

系 1.6. 任意の $f \in M_2(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して, ある $g \in M_{p+1}(SL_2(\mathbb{Z}))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在して $f \equiv g \bmod p$ となる.

さらに指標付きのモジュラー形式についても考察されている. 主張を正確に述べるために準備をしておく.

μ_{p-1} を $\mathbb{C}^\times$ の中の 1 の $p-1$ 乗根からなる群とする. μ_{p-1} の生成元 ζ_{p-1} をとり, p の $\mathbb{Z}[\zeta_{p-1}]$ の中での素イデアル分解を考える. $\Phi(X) \in \mathbb{Z}[X]$ を ζ_{p-1} の最小多項式, すなわち ζ_{p-1} を根にもつような円分多項式とする. このとき $\Phi(X)$ はいつも $\Phi(X) \equiv q_1(X) \cdots q_r(X) \bmod p$ と分解できる. ただし $r = \varphi(p-1)$ であり, 各 $q_i(X)$ は次数 1 の多項式で $q_i(X) \not\equiv q_j(X) \bmod p$ を満たす. このとき p は r 個の素イデアル $\mathfrak{p}_i := (q_i(\zeta_{p-1}), p)$ によって次のように完全分解する:

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = (q_1(\zeta_{p-1}), p) \cdots (q_r(\zeta_{p-1}), p).$$

ある $d_i \in \mathbb{Z}$ によって $q_i(X) = X - d_i$ と書けば σ_i という $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ から $\mathbb{Q}_p$ への埋込みが $\sigma_i(\zeta_{p-1}) = \omega(d_i)$ によって定まる. ここで ω は Teichmüller 指標である. σ_i を素イデアル $\mathfrak{p}_i$ に対応する埋め込みとよぶ.

例 1.7. (1) $p = 5$ ($\zeta_4 = i$) のとき. $\Phi(X) = X^2 + 1 \equiv (X-2)(X-3) \bmod 5$ である. $\mathfrak{p}_1 := (i-2, 5)$, $\mathfrak{p}_2 := (i-3, 5)$ とおくと $(5) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ となる. 実際, $(i-2, 5) = (i-2)$, $(i-3, 5) = (i+2)$ である. したがって $\mathfrak{p}_i$ に対応する埋め込み σ_i は $\sigma_1(i) = \omega(2)$ と $\sigma_2(i) = \omega(3)$ によって定まる 2 つである.
(2) $p = 7$ ($\zeta_6 = (1+\sqrt{3}i)/2$) のとき. $\Phi(X) = X^2 - X + 1 \equiv (X-3)(X-5) \bmod 7$ である. $\mathfrak{p}_1 := (\zeta_6 - 3, 5)$, $\mathfrak{p}_2 := (\zeta_6 - 5, 5)$ とおけば $7 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ となる. したがって σ_i は $\sigma_1(\zeta_6) = \omega(3)$ と $\sigma_2(\zeta_6) = \omega(5)$ によって定まる 2 つである.

上述の埋め込みを一つ固定して, それを σ とする. $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ の中に係数をもつような形式的ベキ級数 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)q^n \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})[\![q]\!]$ に対して, $f^\sigma := \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)^\sigma q^n \in \mathbb{Q}_p[\![q]\!]$ と定める. これらの記号の下で次の定理を得る.

定理 1.8. 任意の $f \in M_k(\Gamma_0(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ に対して, f^σ は p 進モジュラー形式である.

注意 1.9. σ は有理数を動かさないので, 定理 1.8 は定理 1.5 を含んでいる.

2 拡張および多変数化

この節では, 最近なされている Serre の p 進モジュラー形式の多変数化に関する結果を述べる.

2.1 定義と記号

$\mathbb{H}_n$ を次数 n の Siegel 上半空間とする．Siegel モジュラー群 $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}_n$ に一般化された一次分数変換

$$MZ := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

によって作用する．自然数 N に対して, 合同部分群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$ は

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \;\middle|\; C \equiv O_n \bmod N \right\}$$

によって定義される．

自然数 k に対して, χ を mod N の指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ を満たすものとする．このとき重さ k, 指標 χ の Siegel モジュラー形式の空間 $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ は正則関数 $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ であって,

$$f(MZ) = \chi(\det D) \det(CZ+D)^k f(Z), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(N)$$

という変換規則を満たすもの全体からなる．もし χ が自明な指標なら $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N)) = M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ と書くことにする．Siegel モジュラー形式 $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ は

$$f = \sum_{O \le T \in \Lambda_n} a_f(T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

という形の Fourier 展開をもつ．ここで, T は Λ_n の半正定値の元全体を走り, Λ_n は

$$\Lambda_n := \{ T = (t_{ij}) \in Sym_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z},\ 2t_{ij} \in \mathbb{Z} \}$$

によって定義されるものである．部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に Fourier 係数をもつようなモジュラー形式全体を $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_R$ と表すことにする．すなわち

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_R := \left\{ f = \sum_{O \le T \in \Lambda_n} a_f(T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) \;\middle|\; \forall T \in \Lambda_n,\ a_f(T) \in R \right\}$$

と定義する．

$k > n+1$ となる偶数 k に対して, 次数 n, 重さ k の Siegel Eisenstein 級数は

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^{(n)} \backslash \Gamma_n} \det(CZ+D)^{-k}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

によって定義される．ただし $\Gamma_\infty^{(n)}$ は $\Gamma_\infty^{(n)} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ O_n & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n \right\}$ で定められる Γ_n の部分群である．この級数は広義一様絶対収束し $M_k(\Gamma_n)$ の元を定める．Siegel [23, 24] によって, この級数の Fourier 係数が有理数であり, かつ分母が有界であることが知られている．さらに明示公式については, $n = 2$ のときは Maass [14] 等, n が一般の場合には桂田 [10] によって求められている．

2.2 p 進 Siegel モジュラー形式

p 進体 $\mathbb{Q}_p$ 上に係数をもつような $g = \sum_{O \le T \in \Lambda_n} b(T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$ という形の形式的ベキ級数を考える．このようなベキ級数のより深い解釈は [1, 3] を参照されたい．

定義 2.1. $\mathbb{Q}_p$ 上に係数をもつ形式的ベキ級数 $g = \sum_{O \le T \in \Lambda_n} b(T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$ が p **進 Siegel モジュラー形式**であるとは, ある Siegel モジュラー形式の列 $\{f_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}\}$ が存在して, k_m は増大し

$$\lim_{m \to \infty} f_m = g \ (p \text{ 進極限})$$

となることである. ここで, p 進極限の意味は $m \to \infty$ のとき $\inf_{T \in \Lambda_n}(\mathrm{ord}_p(a_{f_m}(T) - b(T))) \to \infty$ となることである. 特に Siegel Eisenstein 級数の p 進極限で得られる p 進 Siegel モジュラー形式のことを p **進 Siegel Eisenstein 級数**とよぶ.

まずは定理 1.3 に対応する結果を述べる.

定理 2.2. 次の条件のとき, 数列 $\{k_m\}$ によって決まる指標 χ が存在して

$$\lim_{m \to \infty} E_{k_m}^{(n)} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi)$$

となる.
(1) (長岡 [18]) n は任意, $p \ge 5$ かつ $p \equiv 3 \bmod 4$, $k_m := 1 + (p-1)p^{m-1}/2$.
(2) (桂田-長岡 [11], 水野 [16]) $n = 2$, p は上と同じ, $k \ge 1$ は奇数, $k_m := k + (p-1)p^{m-1}/2$.
(3) (菊田-長岡 [13], 水野-長岡 [17]) $n = 2$, p は奇素数, $k \ge 2$ は偶数, $k_m := k + (p-1)p^{m-1}$.
(4) (竹森 [26]) $n = 2$, p は任意, $k \ge 4$ は自然数, k_m は増大列で $\boldsymbol{X}$ の中で (k, α) に収束する.

注意 2.3. (1) については, 1 が k にあたる. (2) の水野 [16] の結果は, 主題の p 進極限が丁度レベル p の Siegel Eisenstein 級数と一致するというものである. (3) の菊田-長岡 [13] の結果は $k = 2$ の場合のみのもので, 水野-長岡 [17] の結果に含まれる. ただし証明方法は異なる. (4) の竹森 [26] の結果は, 条件を満たす全ての p 進極限がレベル p の Siegel Eisenstein 級数であることを述べている.

次にレベル p のモジュラー形式はいつ p 進モジュラー形式であるかということについてであるが, これは Böcherer-長岡 [3] によって考察されている.

定理 2.4 (Böcherer-長岡 [3])**.** p を奇素数とする. 任意の $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}}$ は p 進 Siegel モジュラー形式である.

一変数の場合とは事情が異なり, この定理の証明の一次近似をとっても系 1.6 に対応するものは導かれない. したがって対応する合同関係が欲しければ, 個別に考える必要があるがこれについては菊田-長岡 [13] が次のことを予想している.

予想 2.5. p を十分大きな素数とする. 任意の $f \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して, ある $g \in M_{p+1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在して $f \equiv g \bmod p$ となる.

注意 2.6. 菊田-長岡 [13] で予想した当初は p が "十分大きな" という仮定はなかったが, 後に Böcherer によって指摘された.

菊田-長岡 [13] では, 上記 f がカスプ形式でない場合の合同の例を挙げている. f がカスプ形式の場合の数値例については, 長岡-中村 [19] によって与えられている. ここで彼らの数値例を紹介する.

$\Gamma_0^{(2)}(11)$ に関する重さ 2 のカスプ形式が吉田リフトによって構成される (吉田リフトについては [27] 参照).

$$S_1^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(11)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

とおく．これに対して

$$F_2^{(11)} := \frac{1}{24}(3\theta_{S_1^{(11)}} - \theta_{S_2^{(11)}} - 2\theta_{S_3^{(11)}})$$

とおけば $F_2^{(11)}$ は重さ 2 のカスプ形式となり, Fourier 係数は全て $\mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる．ただし, θ_{S_j} は

$$\theta_{S_j}(Z) := \sum_{X \in M_{4,2}(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \mathrm{tr}(S_j[X]Z)}$$

で定義される．

もう一つ吉田リフトでレベル 19 のカスプ形式を構成しておく．

$$S_1^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(19)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$F_2^{(19)} := \frac{1}{8}(\theta_{S_1^{(19)}} - 2\theta_{S_2^{(19)}} + \theta_{S_3^{(19)}})$$

とおく．すると $F_2^{(19)}$ は $\Gamma_0^{(2)}(19)$ に関する重さ 2 のカスプ形式である．そして Fourier 係数は全て $\mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる．

$E_4 = E_4^{(2)}$, $E_6 = E_6^{(2)}$, χ_{10}, χ_{12} をいつものように, 井草の生成元とする．ただし "先頭" の項の Fourier 係数が 1 となるように正規化しておく．$\chi_{20} := 11E_4E_6\chi_{10} + 4\chi_{10}^2 + 8E_4^2\chi_{12}$ とおく．

例 2.7 (長岡-中村 [19])**.** (1) $\mathrm{tr}(T) \leq 5$ なる $T \in \Lambda_2$ に対して, $a_{F_2^{(11)}}(T) \equiv a_{-\chi_{12}}(T) \bmod 11$ となる．
(2) $\mathrm{tr}(T) \leq 4$ なる $T \in \Lambda_2$ に対して, $a_{F_2^{(19)}}(T) \equiv a_{\chi_{20}}(T) \bmod 19$ が成り立つ．

この数値例が挙げられた後に, 予想 2.5 はある条件の下で正しいことが Böcherer-長岡によって示された．

定理 2.8 (Böcherer-長岡 [4])**.** "mild condition" なる条件の下で予想が成立する．この条件は吉田リフトを含む．

条件の詳細は省くので, これについては論文 [4] を参照されたい．この定理から上記の $F_2^{(11)}$ と $F_2^{(19)}$ に対して, "ある"$g \in M_{p+1}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在して $F_2^{(p)} \equiv g \bmod p$ となることが保証された訳であるが, 例 2.7 で挙げたモジュラー形式が本当に合同になっているかどうかは分からない．そこで, これを確かめる術として次のような結果があることを紹介する．

定理 2.9 (Choi-Choie-菊田 [5])**.** $p \geq 5$ とする．Γ を Γ_2 の合同部分群とする．
(1) $f \in M_k(\Gamma)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が, $0 \leq m,\ n \leq \frac{k}{10}[\Gamma_2 : \Gamma]$ となる全ての $T = \left(\begin{smallmatrix} m & * \\ * & n \end{smallmatrix}\right)$ に対して $a_f(T) \equiv 0 \bmod p$ ならば $f \equiv 0 \bmod p$ である．
(2) 特に $\Gamma = \Gamma_2$ のときはこの結果が最良である．すなわち, ある $f \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在して, $0 \leq m,\ n \leq \frac{k}{10} - 1$ となる全ての $T = \left(\begin{smallmatrix} m & * \\ * & n \end{smallmatrix}\right)$ に対して $a_f(T) \equiv 0 \bmod p$ となるが $f \not\equiv 0 \bmod p$ となるものが存在する．

注意 2.10. 類似の結果が Poor-Yuen [20] によって得られている．彼らの結果は任意の素数に対する主張である．

これは Sturm の定理 [25] の Siegel モジュラー版と解釈できる．この定理から例 2.7 で挙げたモジュラー形式が本当に合同であることが示される．

系 2.11 (Choi-Choie-菊田 [5])**.** (1) $F_2^{(11)} \equiv -\chi_{12} \bmod 11$.
(2) $F_2^{(19)} \equiv \chi_{20} \bmod 19$.

注意 2.12. 系 2.11 の証明には定理 2.8 と 2.9 の両方を用いる.

最後に指標付きのモジュラー形式に関する結果を述べる.

定理 2.13 (菊田 [12]). p を奇素数とする. 任意の $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ に対して f^σ は p 進 Siegel モジュラー形式である.

次の節ではこの定理の証明について述べる.

3 定理 2.13 の証明

Serre の議論を応用するために次の補題を用意する.

補題 3.1. 任意の mod p の指標 χ に対して, あるモジュラー形式の列 $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$ が存在して, $\lim_{m\to\infty} G_{k_m}^\sigma = 1$ となる.

補題 3.2. 任意の $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ に対して, f^σ が p 進 Siegel モジュラー形式である.

まずこの二つの補題が示されたと仮定して, 定理 2.13 を証明する. 尚, 証明は以下のように Serre の証明と全く同じ流れを辿る.

定理 2.13 の証明. $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ とする. 補題 3.1 を χ^{-1} の場合で適用すると, ある列 $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi^{-1})_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$ で $\lim_{m\to\infty} G_{k_m}^\sigma = 1$ となるものが存在する. これらの G_{k_m} を f に掛ける. すると各 m について $fG_{k_m} \in M_{k+k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ となるから, 補題 3.2 より $(fG_{k_m})^\sigma$ は p 進 Siegel モジュラー形式である. G_{k_m} のとり方から

$$\lim_{m\to\infty} (fG_{k_m})^\sigma = \lim_{m\to\infty} f^\sigma G_{k_m}^\sigma = f^\sigma$$

が得られる. したがって f^σ は p 進 Siegel モジュラー形式の極限であるから p 進 Siegel モジュラー形式である. □

ということで証明を完成させるためには, 補題 3.1 と 3.2 を示せばよい. 補題 3.1 の証明には以下で紹介する Maass リフトを使う.

3.1 Jacobi 形式と Maass リフト

簡単のために素数レベルのみを考える. p を素数とし, χ を mod p の Dirichlet 指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ を満たすものとする. ϕ を重さ k, 指数 1, 指標 χ の $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に関する Jacobi 形式とする. このとき ϕ は

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ 4n-r^2\geq 0}} c(n,r) q^n \zeta^r, \quad (\tau, z) \in \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C},$$

という形の Fourier 展開をもつ. ただし $q := e^{2\pi i\tau}$, $\zeta := e^{2\pi iz}$ である. ϕ の Maass リフト $\mathcal{M}\phi \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)$ は

$$\mathcal{M}\phi(Z) = \left(\frac{1}{2} L(1-k, \chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{0<d|n \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k-1} q^n \right) c(0,0)$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{4nl-r^2\geq 0} \sum_{\substack{0<d|(n,r,l) \\ (p,d)=1}} \chi(d) d^{k-1} c\left(\frac{nl}{d^2}, \frac{r}{d}\right) q^n \zeta^r q'^l, \quad Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2,$$

という形で記述される. ここで $q' := e^{2\pi iw}$ とおいた. レベル付き Jacobi 形式やそのリフティングについての詳細は [7, 15] などを参照されたい.

3.2　補題 3.1 の証明

Serre [22] の記号に従い, $(s,u)\in \boldsymbol{X}$ に対して $\zeta^*(s,u) := L_p(s,\omega^{1-u})$ とおく. ここで $L_p(s,\chi)$ は久保田-Leopoldt の p 進 L 関数である (例えば [9] 参照). $\alpha\in\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ を $\chi^\sigma=\omega^\alpha$ を満たすものとする. $a\equiv -\alpha \bmod p-1$ となるような $0<a\in\mathbb{Z}$ に対して, $\{k_m=ap^{m+1}\}$ という数列をとる. ここで a の偶奇は χ の偶奇と一致することに注意する.

Eichler-Zagier [6] のように, $E^J_{k,1}(\tau,z)$ を重さ k, 指数 1 の正規化された Jacobi Eisenstein 級数とする. すなわち定数項を 1 にしておく. この級数の Fourier 係数は全て有理数となることが知られている. さらに

$$E_k^{(1)} = 1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0<d|n} d^{k-1}q^n \in M_k(\Gamma_1),$$
$$E_{k,\chi}^{(1)} = 1+\frac{2}{L(1-k,\chi)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0<d|n}\chi(d)d^{k-1}q^n\in M_k(\Gamma_0^{(1)}(p),\chi)$$

をそれぞれ Γ_1 に関する重さ k の正規化された Eisenstein 級数, $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に関する指標 χ の正規化された Hecke の Eisenstein 級数とする. このとき

$$\phi_{k_m} := E^{(1)}_{a(p-2),\chi}E^{(1)}_{ap(p^m-1)}E^J_{2a,1}$$

とおくと ϕ_{k_m} は重さ k_m, 指数 1, 指標 χ の $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に関する Jacobi 形式となる. さらに $E^{(1)}_{ap(p^m-1)}E^J_{2a,1}$ の Fourier 係数は全て有理数となる. ϕ_{k_m} の Fourier 展開を $\phi_{k_m}=\sum_{n,r}c_{k_m}(n,r)q^n\zeta^r$ とすると $c_{k_m}(n,r)\in\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ であり $c_{k_m}(0,0)=1$ となる. このとき次が示される.

補題 3.3. $\{\phi^\sigma_{k_m}\}$ は形式的ベキ級数環 $\mathbb{Q}_p[\zeta,\zeta^{-1}][\![q]\!]$ の中で収束する. Fourier 係数の収束は一様である.

この補題の証明は省略する. Maass リフト $\mathcal{M}\phi_{k_m} =: F_{k_m}\in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p),\chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ をとると, $c_{k_m}(0,0)=1$ より次のような Fourier 展開

$$\begin{aligned}F_{k_m} &= \frac{1}{2}L(1-k_m,\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}}\chi(d)d^{k_m-1}q^n\\ &\quad+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{4nl-r^2\geq 0}\sum_{\substack{0<d|(n,r,l)\\(p,d)=1}}\chi(d)d^{k_m-1}c_{k_m}\left(\frac{nl}{d^2},\frac{r}{d}\right)q^n\zeta^r q'^l\end{aligned}$$

を得る. ここで $F^\sigma_{k_m}$ の q-展開の形を考える.

まず $l>0$ に対する, l 番目の Fourier Jacobi 係数は

$$\sum_{4nl-r^2\geq 0}\sum_{\substack{0<d|(n,r,l)\\(p,d)=1}}\chi(d)d^{k_m-1}c_{k_m}\left(\frac{nl}{d^2},\frac{r}{d}\right)q^n\zeta^r \tag{3.1}$$

である. 補題 3.1 の証明に必要となることは, この項に σ を施したときに, 係数が $\mathbb{Q}_p$ の元になるということである. そしてそれは σ の定義から明らかである. しかしながら, ここでは以下のような Serre の表示に倣うことにする.

$\mathbb{Z}_p^\times\simeq(1+p\mathbb{Z}_p)\times(\mathbb{Z}_p$の中の 1 のベキ根) であるから, $p\nmid d$ なる整数 d に対して $d=\langle d\rangle\,\omega(d)$ という形に分解できる (岩澤 [9] 参照). $(s,\alpha)\in\boldsymbol{X}$ に対して $d^{(s,\alpha)}:=\langle d\rangle^s\,\omega^\alpha$ と定義する. ここで $\langle d\rangle\equiv 1 \bmod p$ であるから $\langle d\rangle^s$ が意味をもつ. 特に $\alpha\in\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ を $\boldsymbol{X}$ の中で $(0,\alpha)$ と同一視する. すなわち $d^\alpha=\omega(d)^\alpha=\chi(d)^\sigma$ である. この表示を用いれば, 上記 (3.1) の項に σ を施したものは

$$\sum_{4nl-r^2\geq 0}\sum_{\substack{0<d|(n,r,l)\\(p,d)=1}}d^{k_m+\alpha-1}c_{k_m}\left(\frac{nl}{d^2},\frac{r}{d}\right)^\sigma q^n\zeta^r$$

と表されることが分かる.

次に, 0 番目の Fourier Jacobi 係数については, 重さ k_m, 指標 χ の Hecke の Eisenstein 級数である. $L(1-k,\chi)^\sigma = L_p(1-k,\omega^{k+\alpha})$ (岩澤 [9] 参照) となることと, 上と同様の議論により

$$\left(\frac{1}{2}L(1-k_m,\chi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}}\chi(d)d^{k_m-1}q^n\right)^\sigma = \frac{1}{2}\zeta^*(1-k_m,1-k_m-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}}d^{k_m+\alpha-1}q^n$$

を得る.

最後に $G_{k_m} := 2L(1-k_m,\chi)^{-1}F_{k_m}$ とおく. k_m は $\boldsymbol{X}$ の中で $(0,-\alpha)$ に行くから, $(k_m, k_m+\alpha)$ は $(0,0)$ に行く. $\zeta^*(s,u)$ は $(1,1)$ で 1 位の極をもつことに注意して, この事実と補題 3.3 を合わせれば, $G_{k_m}^\sigma$ は 1 に収束することが分かる. 実際 $G_{k_m}^\sigma$ の q-展開は次で与えられる:

$$\begin{aligned} G_{k_m}^\sigma &= 1+\frac{2}{\zeta^*(1-k_m,1-k_m-\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{0<d|n\\(p,d)=1}}d^{k_m+\alpha-1}q^n \\ &\quad +\frac{2}{\zeta^*(1-k_m,1-k_m-\alpha)}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{4nl-r^2\geq 0}\sum_{\substack{0<d|(n,r,l)\\(p,d)=1}}d^{k_m+\alpha-1}c_{k_m}\left(\frac{nl}{d^2},\frac{r}{d}\right)^\sigma q^n\zeta^r q'^l\right). \end{aligned}$$

これで補題 3.1 が証明された. □

3.3 補題 3.2 の証明

補題の主張よりも一般的な場合として, n が任意の場合に示す. $f \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ とする. 志村 [21] の結果により $M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{C}} = M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ が成り立つ. これは, ある $c_i \in \mathbb{C}$ とある $f_i \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\mathbb{Q}}$ により $f=\sum_{i=1}^N c_i f_i$ という形に一意的に書けることを示している. f_i の Fourier 係数は全て有理数であるから, 各 $\tau \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(\mu_{p-1}))$ に対して $f^\tau = \sum_{i=1}^N c_i^\tau f_i$ となる. 一方では, f の Fourier 係数が 全て $\mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ に含まれることから $f^\tau = f = \sum_{i=1}^N c_i f_i$ を得る. f の表示の一位性により $c_i^\tau = c_i$ となる. すなわち各 i について $c_i \in \mathbb{Q}(\mu_{p-1})$ である. これより $f^\sigma = \sum_{i=1}^N c_i^\sigma f_i$ について $c_i^\sigma \in \mathbb{Q}_p$ であり, 定理 2.4 により各 f_i が p 進 Siegel モジュラー形式であるから, f^σ も p 進 Siegel モジュラー形式となることが分かる. これで補題 3.2 が証明され, したがって定理 2.13 の証明も完了した. □

4 定理 2.13 の一般化について

前節で述べた証明から次のことが分かる. 補題 3.2 の方は一般次数の場合に示した. そのため補題 3.1 の方も一般の次数について示すことができれば, 定理 2.13 の次数に関する一般化が可能となる. したがって次の問題を挙げておく.

問題 4.1. p を奇素数とする. 任意の mod p の Dirichlet 指標 χ に対して, Siegel モジュラー形式の列 $\{G_{k_m} \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(n)}(p),\chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$ であって $\lim_{m\to\infty} G_{k_m}^\sigma = 1$ を満たすものを構成せよ.

ここでもう一つこの問題と同値な問題を挙げる.

問題 4.2. p, χ を上と同じとする. このとき $G_a \in M_a(\Gamma_0^{(n)}(p),\chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ で $G_a^\sigma \equiv 1 \bmod p$ となるものを構成せよ.

注意 4.3. (1) 問題 4.2 が解けるなら, 問題 4.1 の方も $G_{k_m} := G_a^{p^m}$ と置くことにより解ける.
(2) $\alpha \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ で $\chi^\sigma = \omega^\alpha$ となるようなものをとる. 定理 2.13 の証明から分かることであるが, $f \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi^{-1})_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ に対する f^σ の "p 進ウェイト" なるものは $(k, k-\alpha)$ である. ここで補題 3.1 のモジュラー形式の列がもう一つ存在したと仮定して, それを $\{G'_{k'_m} \in M_{k'_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}\}$ とする. p 進ウェイトの well-defined 性が $\{k + k'_m\}$ も $\boldsymbol{X}$ の中で $(k, k-\alpha)$ に収束することを保証し, したがって $\{k'_m\}$ は自動的に $(0, -\alpha)$ に収束する. 同様に, 問題 4.1 の $\{k_m\}$ も自動的に $(0, -\alpha)$ に収束する. なぜなら, Siegel Φ 作用素に対して $\Phi^{n-2}(G_{k_m}) \in M_{k_m}(\Gamma_0^{(2)}(p), \chi)_{\mathbb{Q}(\mu_{p-1})}$ を考えると, これは $\lim_{m\to\infty} \Phi^{n-2}(G_{k_m})^\sigma = 1$ を満たすからである. p 進ウェイトや, その well-defined 性については [1, 8, 22] を参照されたい.
(3) 上記 (1) と (2) を併せると, 問題 4.2 の中の重さ a と指標 χ の間に $a \equiv -\alpha \bmod p-1$ という関係があることが分かる. ただし α は $\chi^\sigma = \omega^\alpha$ となるものである.
(4) $p-1 \mid a$ (すなわち χ が自明指標) のときは, 問題 4.2 は Böcherer-長岡 [2] の結果である. 彼らはテータ級数を用いて G_{p-1} を構成したが, 実でない指標付きのものは同じ方法では構成できない.

参考文献

[1] S. Böcherer and S. Nagaoka, Congruences for Siegel modular forms and their weights, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **80** (2010), 227–231.

[2] S. Böcherer and S. Nagaoka, On mod p properties of Siegel modular forms, Math. Ann. **338** (2007), 421–433.

[3] S. Böcherer and S. Nagaoka, On p-adic properties of Siegel modular forms, preprint, 2011.

[4] S. Böcherer and S. Nagaoka, On Siegel modular forms of level p and their properties mod p, Manuscripta Math. **132** (2010), 501–515.

[5] D. Choi, Y. Choie and T. Kikuta, Bounds for Siegel modular forms of genus 2 modulo p, preprint, 2011, arXiv:1103.0821v1.

[6] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, vol. 55, Birkhäuser, Boston, 1985.

[7] T. Ibukiyama, Memorandum on Saito Kurokawa lifting of level N and Jacobi forms, preprint.

[8] T. Ichikawa, Congruences between Siegel modular forms, Math. Ann. **342** (2008), 527–532.

[9] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Ann. Math. Studies, no. 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[10] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.

[11] H. Katsurada and S. Nagaoka, On p-adic properties of Siegel-Eisenstein series, J. Number Theory **104** (2004), 100–117.

[12] T, Kikuta, On p-adic Siegel modular forms of non-real Nebentypus, Acta Arith., to appear.

[13] T. Kikuta and S. Nagaoka, On a correspondence between p-adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series, Acta Arith. **134** (2008), 111–126.

[14] H. Maass, Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **38** (1972).

[15] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree two and square-free odd levels, Math. Z. **263** (2009), 837–860.

[16] Y. Mizuno, On p-adic Siegel-Eisenstein series of weight k, Acta Arith. **131** (2008), 193–199.

[17] Y. Mizuno and S. Nagaoka, Some congruence for Saito-Kurokawa lifts, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **80** (2010), 9–23.

[18] S. Nagaoka, A remark on Serre's example of p-adic Eisenstein series, Math. Z. **235** (2000), 227–250.

[19] S. Nagaoka and Y. Nakamura, On congruences between Siegel modular forms of degree 2, J. School sci. Eng Kinki Univ. **45** (2009), 5–8.

[20] C. Poor and D. Yuen, Paramodular Cusp Forms, preprint, arXiv:0912.0049.

[21] G. Shimura, On the Fourier coefficients of modular forms in several variables, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.Kl.II **17** (1975), 261–268.

[22] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Lecture Notes in Math., vol. 350, pp. 191–268, Springer, Berlin, 1973.

[23] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116** (1939), 617–657.

[24] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **34** (1964).

[25] J. Sturm, On the congruence of modular forms, Lecture Notes in Math., vol. 1240, pp. 275–228, Springer, Berlin, 1984.

[26] S. Takemori, p-adic Siegel-Eisenstein series of degree 2, preprint, 2010.

[27] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Inv. Math. **60** (1980), 193–248.