多変数モジュラー形式のSturm型の定理について

菊田　俊幸　(近畿大学)[*1]
Choie YoungJu　(Postech)[*2]
Choi Dohoon　(Korea Aerospace University)[*3]

素数pに対して, 二つのmodular 形式がpを法として合同であるためには, 何番目までのFourier 係数が合同であることを確かめればよいか, その数をSturmが述べている。

定理 0.1 (Sturm [3])**.** *$f=\sum a_n q^n$が weight kの$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$に関する modular 形式であるとし, 全ての Fourier 係数が局所環$\mathbb{Z}_{(p)}$に含まれているものとする. このとき$n \leq (k/12)[SL_2(\mathbb{Z}):\Gamma]$となる全ての$n$に対して, $a_n \equiv 0 \ mod \ p$ならば$f \equiv 0 \ mod \ p$である.*

本講演では, この定理のSiegel modular 形式版について述べる.

$f=\sum A(n,r,m)q^n\zeta^r q'^m$を$\Gamma \subset Sp_n(\mathbb{Z})$に関するweight kのSiegel modular 形式のFourier 展開とする. このとき次が成り立つ.

定理 0.2 (Choi-Choie-Kikuta)**.** *pを5以上の素数とする. $n,m \leq (k/10)[Sp_n(\mathbb{Z}):\Gamma]$となる全ての$(n,r,m)$に対して, $A(n,r,m)\equiv 0 \ mod \ p$ならば$f \equiv 0 \ mod \ p$である.*

さらに, fがfull modular 形式の場合には, この結果が最善であることが分かっている. すなわち,

定理 0.3 (Choi-Choie-Kikuta)**.** *$n, \ m \leq k/10-1$となる全ての(n,r,m)に対して$A(n,r,m)\equiv 0 \ mod \ p$であるが$f \not\equiv 0 \ mod \ p$となるものが存在する.*

この定理は実例を構成することによって得られる.

例

$\Gamma_0^{(2)}(11)$に関するweight 2のcusp 形式が吉田リフトによって構成される.

$$S_1^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(11)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix},$$

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-11F46, MSC-11F33
キーワード：Congruences for modular forms, Siegel modular form
[*1] 〒577-8502　東大阪市小若江3-4-1　近畿大学 総合理工学研究科
e-mail: kikuta84@gmail.com
web: http://kikuta.yohamanzokuja.com/
[*2] e-mail: yjc@postech.ac.kr
[*3] e-mail: choija@kau.ac.kr

とおく．これに対して

$$F_2^{(11)} := \frac{1}{24}(3\theta_{S_1^{(11)}} - \theta_{S_2^{(11)}} - 2\theta_{S_3^{(11)}}),$$

とおけば $F_2^{(11)}$ は weight 2 の cusp 形式となり, Fourier 係数は全て $\mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる．ただし, θ_{S_j} は

$$\theta_{S_j}(Z) := \sum_{X \in M_{4,2}(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \mathrm{tr}(S_j[X]Z)}$$

で定義される．もう一つ吉田リフトで level 19 の cusp 形式を構成しておく．

$$S_1^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_2^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}, \quad S_3^{(19)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix},$$

に対して,

$$F_2^{(19)} := \frac{1}{8}(\theta_{S_1^{(19)}} - 2\theta_{S_2^{(19)}} + \theta_{S_3^{(19)}}),$$

とおく．すると $F_2^{(19)}$ は $\Gamma_0^{(2)}(19))$ に関する weight 2 の cusp 形式である．そして Fourier 係数は全て $\mathbb{Z}_{(p)}$ に含まれる．

$E_4 = E_4^{(2)}$, $E_6 = E_6^{(2)}$, χ_{10}, χ_{12} をいつものように, 井草の生成元とする．ただし "先頭" の項の Fourier 係数が 1 となるように正規化しておく．$\chi_{20} := 11E_4E_6\chi_{10} + 4\chi_{10}^2 + 8E_4^2\chi_{12}$ とおく．

命題 0.4. *(1)* $F_2^{(11)} \equiv -\chi_{12}$ *mod* 11, *(2)* $F_2^{(19)} \equiv \chi_{20}$ *mod* 19.

これら二つの合同式は, 数値例を基に長岡-中村 [2] によって予想されていたものである．我々は彼らの数値例を用いて証明を与えた．ただし, 定理をそのまま証明に適用しようとすると, かなり多くの Fourier 係数の合同をチェックしなければならず, 長岡と中村の数値例だけでは間に合わない．したがって, 長岡-Böcherer [1] によって, 「weight 2 の吉田リフトに対して, ある weight $p+1$ の full modular 形式があって合同となる」という定理を応用した．

参考文献

[1] S. Böcherer, S. Nagaoka, *On Siegel modular forms of level p and their properties mod p*, Manuscripta. Math. 132, (2010), 501–515.

[2] S. Nagaoka, Y. Nakamura, *On congruences between Siegel modular forms of degree* 2, J. School sci. Eng Kinki Univ. **45**, 5–8 (2009)

[3] J. Sturm, *On the congruence of modular forms*, Number theory (New York, 1984–1985), 275–280, Lecture Notes in Math., 1240, Springer, Berlin, 1987.