多変数モジュラー形式の場合における Ramanujan 型の合同について

菊田 俊幸　(大阪工業大学 非常勤)[*1]
長岡 昇勇　(近畿大学)[*2]

よく知られているように Ramanujan は,

$$\sigma_{11}(n) \equiv \tau(n) \bmod 691$$

となることを述べている. ここで $\sigma_m(n) := \sum_{0<d|n} d^m$ であり, $\tau(n)$ は Ramanujan の Δ 関数の n 番目の Fourier 係数である. この合同式は重さ 12 の Eisenstein 級数と重さ 12 のカスプ形式の間に合同関係があることを意味する. 本講演では, Siegel モジュラー形式と Hermite モジュラー形式の場合において, Eisenstein 級数とカスプ形式の間に合同関係があることを報告する.

Siegel モジュラー形式の場合

偶数 $k \geq 4$ に対して, E_k を $Sp_2(\mathbb{Z})$ に対する重さ k の正規化された Siegel Eisenstein 級数とし,

$$G_k := -\frac{B_k \cdot B_{2k-2}}{4k(k-1)} E_k$$

とおく. ただし B_m は m 番目の Bernoulli 数である. このとき次が成り立つ.

定理 1. $(p, 2k-2)$ を非正則対とすると, 重さ k の $Sp_2(\mathbb{Z})$ に対するあるカスプ形式 f が存在して

$$G_k \equiv f \bmod p.$$

が成り立つ.

注意. 素数 p と自然数 m が $1 < m < p$ かつ $p | B_m$ を満たすとき, それらの対 (p, m) は非正則対であると言う.

Hermite モジュラー形式の場合

$\boldsymbol{K}$ を類数 1 の虚二次体とし, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{K}}$ をその整数環とする. $U_2(\mathcal{O}_{\boldsymbol{K}})$ を $\boldsymbol{K}$ に対する 2 次の Hermite モジュラー群とし, $U_2(\mathcal{O}_{\boldsymbol{K}})$ 上の指標 ν_k を

$$\nu_k := \begin{cases} \det^{\frac{k}{2}} & d_{\boldsymbol{K}} = -4 \text{ のとき}, \\ \det^{k} & d_{\boldsymbol{K}} = -3 \text{ のとき}, \\ \text{自明指標} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

2010 Mathematics Subject Classification: MSC-11F33, MSC-11F46
キーワード：Congruences for modular forms

[*1] e-mail: kikuta84@gmail.com
web: http://kikuta.yohamanzokuja.com/
[*2] e-mail: nagaoka@math.kindai.ac.jp

によって定める．偶数$k \geq 4$に対して，$E_{k,\boldsymbol{K}}$を$U_2(\mathcal{O}_{\boldsymbol{K}})$に対する，重さが$k$で指標が$\nu_k$の正規化されたHermite Eisenstein級数とする．さらに

$$G_{k,\boldsymbol{K}} := \frac{B_k \cdot B_{k-1,\chi_{\boldsymbol{K}}}}{4k(k-1)} E_{k,\boldsymbol{K}}$$

とおく．ただし$B_{m,\chi_{\boldsymbol{K}}}$はKronecker指標$\chi_{\boldsymbol{K}}$に付随する$m$番目の一般Bernoulli数である．このとき次が成り立つ．

定理 2. 素数pが次の二つの条件*(A)*と*(B)*を満たすと仮定する．

$$\text{(A) } p \nmid B_{3,\chi_{\boldsymbol{K}}} \text{ かつ } p \nmid B_{5,\chi_{\boldsymbol{K}}},$$
$$\text{(B) } k < p-1 \text{ かつ } p | B_{k-1,\chi_{\boldsymbol{K}}}.$$

このとき$U_2(\mathcal{O}_{\boldsymbol{K}})$に対する，重さが$k$で指標が$\nu_k$のカスプ形式$f$が存在して

$$G_{k,\boldsymbol{K}} \equiv f \not\equiv 0 \bmod p$$

となる．

系 3. $\boldsymbol{K}$の判別式が-3以外のときは，重さ8の非自明なカスプ形式が存在する．

注意. *(1)* 類数1の虚二次体は，判別式が$-3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$のものに限られる．
(2) $\boldsymbol{K}$の判別式が$-3, -4, -7$のときは条件*(A)*は不要である．
(3) 上記全ての基礎体の場合において，重さ10と12の非自明なカスプ形式が存在することは知られている．

例

重さ10と12の正規化されたSiegelカスプ形式をX_{10}, X_{12}とすると

$$G_{10} \equiv 11313 \cdot X_{10} \bmod 43867,$$
$$G_{12} \equiv 53020 \cdot X_{12} \bmod 131 \cdot 593$$

が成り立つ．

$$F_{10,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} := -\frac{809}{21772800}(E_{10,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} - E_{4,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} \cdot E_{6,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}),$$
$$F_{12,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} := -\frac{1276277}{36578304000}\left(E_{12,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} - \frac{441}{691}E^3_{4,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} - \frac{250}{691}E^2_{6,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}\right)$$

とおくと，これらは重さ10と12のHermiteカスプ形式であり

$$G_{10,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} \equiv 554 \cdot F_{10,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} \bmod 809,$$
$$G_{12,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} \equiv 824 \cdot F_{12,\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} \bmod 1847$$

が成り立つ．

参考文献

[1] T. Kikuta, S. Nagaoka, Ramanujan type congruences for modular forms of several variables, preprint (2012). (arXiv:1204.0087v1 [math.NT])