

Siegel モジュラー形式と法 p 特異性

福岡工業大学・菊田俊幸

Siegel モジュラー形式と法 p 特異性

(Boecherer氏との共同研究)

1. よく言われる動機
2. 定義と記号
3. 特異モジュラー形式
4. 法 p^m 特異モジュラー形式

1. よく言われる動機

1. よく言われる動機

なぜモジュラー形式を調べるのか？



モジュラー形式の Fourier 係数には、**整数論的な関数**が現れる。
モジュラー形式を調べることで、それらの性質が分かる。

例えば ● 約数のべき和 $\dots \sigma_m(t) = \sum_{0 < d|t} d^m$

★ ● 2 次形式の表現数 $\dots \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = t\}$

● Riemann ゼータ関数 $\dots \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ など

1. よく言われる動機

m 変数の 2 次形式 $\longleftrightarrow$ サイズ m の半整数対称行列

$$x^2 + xy + y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 5yz + 3zx$$

$$= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

➡ $\Lambda_m := \{T = (t_{ij}) \in \text{Sym}_m(\mathbb{Q}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ とおくと,

これは m 変数の整数係数の 2 次形式の集合と考えられる.

整数論的な興味の対象

$0 < S \in \Lambda_m$ に対する ${}^t\mathbf{x}S\mathbf{x} = t$ の整数解 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ の個数
i.e., $A(S, t) := \#\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \mid {}^t\mathbf{x}S\mathbf{x} = t\}$
を調べよ.

$S > 0 \implies A(S, t) < \infty$
(固有値が全て正)

$$0 < S \in \Lambda_m, \quad \theta_S := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m} q^{t\mathbf{x}S\mathbf{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S, t)q^t \quad (\text{数列の母関数})$$

を考える. テータ級数とよぶ. $(q := e^{2\pi iz}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0)$

$$\theta_S := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m} q^{\mathbf{x} S \mathbf{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S, t) q^t$$

$$q := e^{2\pi i z}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0$$

➡ θ_S は正則関数を定め, ある種のモジュラー形式になる!

$$\theta_S \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \pm (cz + d)^{m/2} \cdot \theta_S(z)$$

$$(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ with } c \equiv 0 \pmod{L_S})$$

S によって決まる
自然数 (レベルという)

➡ モジュラー形式を調べれば, $A(S, t)$ が分かる (場合がある)!

例. $S = 1_4$ の場合.

$$\rightarrow A(1_4, t) = \#\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t\}$$

$$\theta_{1_4} = \sum_{t=0}^{\infty} A(1_4, t)q^t \text{ は } \underline{\text{重さ 2 で 'レベル 4' のモジュラー形式.}}$$

$M_2(4)$ と表す.

$$\rightarrow \text{色々調べると, } M_2(4) = \langle E_2, \Delta_2 \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$E_2 = 1 + 8 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{0 < d|t \\ 4 \nmid d}} d \right) q^t, \quad \Delta_2 = \sum_{\substack{t=1 \\ t:\text{odd}}}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|t} d \right) q^t.$$

$$\Rightarrow \theta_{1_4} = aE_2 + b\Delta_2 \quad \Rightarrow a = 1, b = 0 \quad \Rightarrow \theta_{1_4} = E_2$$

定数項と q の係数を比較して, $A(1_4, 0) = 1, A(1_4, 1) = 8$ より

$$\begin{cases} a = 1 \\ 8a + b = 8 \end{cases}$$

(Jacobi)



$$A(1_4, t) = 8 \sum_{\substack{0 < d|t \\ 4 \nmid d}} d$$

特に



$$A(1_4, t) \geq 1, \forall t \geq 1$$

(Lagrange)

Siegel による多変数化.

より一般的な問題

$0 < S \in \Lambda_m, 0 \leq T \in \Lambda_n$ に対して,

方程式 ${}^tXSX = T$ の整数解 $X \in \mathbb{Z}^{m,n}$ の個数,

i.e., $A(S, T) := \#\{X \in \mathbb{Z}^{m,n} \mid {}^tXSX = T\}$

を調べよ.

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \text{tr}({}^tXSXZ)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S, T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}$$

1. よく言われる動機

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \text{tr}({}^t X S X Z)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S, T) e^{2\pi i \text{tr}(T Z)}$$

$$Z = X + iY \in \text{Sym}_n(\mathbb{C}), \quad Y > 0$$

➡ $\theta_S^{(n)}$ は正則関数を定め, n 次の Siegel モジュラー形式になる!

$$\theta_S^{(n)}((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \pm \det(CZ + D)^{m/2} \cdot \theta_S^{(n)}(Z)$$

$$(\forall \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}_n(\mathbb{Z}) \text{ with } C \equiv 0_n \pmod{L_S})$$

$$A, B, C, D \in M_n(\mathbb{Z})$$

$\text{Sp}_n(\mathbb{Z}) (\subset \text{SL}_{2n}(\mathbb{Z}))$ は, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の‘拡張’

➡ Siegel モジュラー形式を調べれば, $A(S, T)$ が分かる (場合がある)!

■ 1. よく言われる動機

- 一般の $A(S, T)$ を記述する公式は到底望めない
- Jacobi の公式のように, 具体的に書ける場合も勿論あるが稀
(モジュラー形式環の構造が分かっている)

しかし, $A(S, T)$ たちの “ある種の平均” を取れば,
ある程度一斉に書けるというのが次の Siegel の主定理

1. よく言われる動機

$$A, B \in \Lambda_m, \quad A \sim B \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \exists U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \text{ s.t. } {}^t U A U = B$$

Siegelの主定理(1930年代)

$8 \mid m, \quad S_1, \dots, S_h \in \Lambda_m$: 正定値, $\det 2S_i = 1$ (レベル 1),
 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ による類別の同値類の代表系
 (i.e., $S_i \not\sim S_j \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$)

ジーナスタータ級数

$$\sum_{j=1}^h \frac{\theta_{S_j}^{(n)}}{A(S_j, S_j)} = \text{次数 } n, \text{ 重さ } \frac{m}{2} \text{ の “Eisenstein 級数”}$$

➡ $\sum_{j=1}^h \frac{A(S_j, T)}{A(S_j, S_j)} = \text{“Eisenstein 級数” の } (T \text{ に対する) Fourier 係数}$

Siegel–Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式.

- 部分的には Siegel 自身が計算
 - レベル 1 … 桂田 (1999)
 - 奇数レベル, 指標つき … 竹森 (2015)
 - 奇素数レベル, 指標なし … 軍司 (2022)
- } 次数は一般

間には,

Maass, Eichler–Zagier, 水野, 竹森などの次数 2 の場合の結果あり.

モジュラー形式は,

整数論的な問題に解析的なアプローチを与えるもの

ただし, 私の場合は …

モジュラー形式を調べること自体が目的

2. 定義と記号

- Siegel 上半空間:

$$\mathbb{H}_n := \{Z = X + iY \in \text{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid Y > 0\}$$

➡ $\mathbb{H}_1$: 複素上半平面

- Siegel モジュラー群 Γ_n :

$$\begin{aligned}\Gamma_n &:= \text{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \left\{ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^t M J_n M = J_n \right\} \quad (J_n := \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A^t D - B^t C = 1_n, \ A^t B, \ C^t D \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z}) \right\}\end{aligned}$$

➡ $\Gamma_1 = \text{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$

2. 定義と記号

- レベル $N \in \mathbb{N}$ の合同部分群:

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C \equiv 0_n \pmod{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_0^{(n)}(1) = \Gamma_n$$

- 一次分数変換:

$$M \langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in \mathbb{H}_n, \\ Z \in \mathbb{H}_n, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

- $F : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則関数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$: mod N の指標,

F : 重さ k , 指標 χ , $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の **Siegel** モジュラー形式

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F(M \langle Z \rangle) = \chi(\det D) \det(CZ + D)^k F(Z)$$

- モジュラー形式の空間:

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) := \{ \text{重さ } k, \text{ 指標 } \chi, \Gamma_0^{(n)}(N) \text{ の Siegel モジュラー形式} \}$$

- Fourier 展開:

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) \implies F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_F(T) q^T \quad (q^T := e^{2\pi i \text{tr}(TZ)})$$

- $R \subset \mathbb{C}$: 部分環,

$$M_k(\Gamma, \chi)_R := \{ F \in M_k(\Gamma, \chi) \mid a_F(T) \in R \text{ for } \forall T \in \Lambda_n \}$$

2. 定義と記号

- テータ級数のレベル L_S と指標 χ_S :

m : 偶数, $0 < S \in \Lambda_m$,

$$L_S := \min\{N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid N(2S)^{-1} \in 2\Lambda_m\},$$

$$\chi_S(d) = \text{sign}(d)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det 2S}{|d|} \right)$$

➡ $\chi_S^2 = \mathbf{1}_{\det 2S}$ (2 次指標)

$$\begin{aligned} \text{※ } L_S \mid \det 2S \mid L_S^m &\implies \det 2S \text{ と } L_S \text{ の素因子は同じ} \\ &\implies \chi_S: \text{mod } L_S \text{ の指標} \end{aligned}$$

3. 特異モジュラー形式

3. 特異モジュラー形式

Freitag による特異モジュラー形式の理論.

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$: 特異 (*singular*) モジュラー形式

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} a_F(T) = 0 \text{ for } \forall T \text{ with } \text{rank}(T) = n$$

$r := \max\{\text{rank}(T) \mid a_F(T) \neq 0\}$: (特異) 階数

$$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_F(T) q^T$$

$$= \cdots + \underbrace{\sum_{\text{rank}(T)=r} a_F(T) q^T}_{\neq 0} + \underbrace{\sum_{\text{rank}(T)=r+1} a_F(T) q^T}_{=0} + \cdots$$

3. 特異モジュラー形式

特異モジュラー形式の例. r : 偶数, $0 < S \in \Lambda_r$, $n > r$

$$\theta_S^{(n)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S, T) q^T \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(L_S), \chi_S)$$

$$r < \text{rank}(T) \implies A(S, T) = \#\{X \in \mathbb{Z}^{r,n} \mid {}^t X S X = T\} = 0$$

$$\text{rank}({}^t X S X) \leq \min\{\text{rank}(X), \text{rank}(S)\} \leq r$$

$$\implies \theta_S^{(n)}: \text{階数 } r \text{ の特異モジュラー} \quad \left(\text{重さ } (= \frac{r}{2}) < \frac{n}{2} \text{ に注意!} \right)$$

(Freitag の理論) テータ級数以外にはない!

3. 特異モジュラー形式

定理F (Freitag, 1970年代)

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$$

$$(0) \ F: \text{特異モジュラー} \implies \chi^2 = \mathbf{1}_N$$

以下, $\chi^2 = \mathbf{1}_N$.

$$(1) \ F: \text{階数 } r \text{ の特異モジュラー} \implies F = \sum_{\substack{S \in \Lambda_r / \text{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$$

$$(2) \ F: \text{階数 } r \text{ の特異モジュラー} \iff k = \frac{r}{2}$$

$$(3) \ F: \text{特異モジュラー} \iff k < \frac{n}{2}$$

今日の話
定理 F の法 p^m 類似

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}} : p$ -階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{def}}{\iff} a_F(T) \equiv 0 \pmod{p^m} \text{ for } \forall T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \text{rank}(T) > r, \\ &\quad \exists T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \text{rank}(T) = r \text{ s.t. } a_F(T) \not\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

$$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_{n+r}} a_F(T) q^T \quad (p\text{-integral})$$

$$= \cdots + \sum_{\text{rank}(T)=r} a_F(T) q^T + \sum_{\text{rank}(T)=r+1} a_F(T) q^T + \cdots$$

$\not\equiv$

$0 \pmod{p}$

$\equiv$

$0 \pmod{p^m}$

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

法 p^m 特異モジュラー形式の例.

例 1. 通常の特異モジュラー形式は、法 p^m 特異モジュラー形式

例 2. r : 偶数, $0 < S \in \Lambda_r$: レベル p , $n > r$

$\Rightarrow \theta_S^{(n)} \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_S)_{\mathbb{Z}}$: 階数 r の特異モジュラー
 $(\chi_S = \mathbf{1}_p \text{ or } \chi_p (\chi_p := (\frac{*}{p}))$

$\Rightarrow \exists G_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \text{ s.t. } G_m \equiv \theta_S^{(n)} \pmod{p^m}$

$\Rightarrow G_m$ は特異モジュラー ではない が, p -階数 r の法 p^m 特異モジュラー

⊙ k_m は大きくなり, $k_m > n/2$

(当初からの予想) このタイプのものしか存在しないだろう

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

真の重さ (フィルトレーション).

$$\exists E \in M_{p-1}(\Gamma_n) \text{ s.t. } E \equiv 1 \pmod{p} \implies F \equiv FE \pmod{p}$$

重さ k

重さ $k + p - 1$

➡ 重さの異なるモジュラー形式で合同なものはいくらでもある！

➡ それらの中の最小の重さを考えるべき！

フィルトレーション

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}, \quad m: \text{fix}$$

$$\omega_{p^e N}(F) := \min\{l \mid \exists G \in M_l(\Gamma_0^{(n+r)}(p^e N), \chi \cdot \chi_p^t) \text{ s.t. } F \equiv G \pmod{p^m}\}$$

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

定理 (Boecherer-K)

(0)_p (2024, RNT) $p \geq 5$,

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$: 法 “ p ” 特異モジュラー

$$\implies \chi^2 = \mathbf{1}_N \pmod{p\mathbb{Z}[\chi]}$$

(1)_p (MZ, to appear) $p > r + 1$, $n \geq r$, $\chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p -階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\implies F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r / \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | p^e N \\ \chi_S = \chi \cdot \chi_p^t}} c_S \theta_S^{(n+r)} \pmod{p^m} \quad (C_S \in \mathbb{Z}_{(p)})$$

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

ただし, $t \in \mathbb{Z}$ は $k - r/2 = \frac{p-1}{2} \cdot t \cdot p^{m-1}$ を満たす数.
(次ページの (2)'_p 参照)

定理 (Boecherer-K)

$$(2)_p \quad p > r + 1, \quad n \geq r, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}: p$ -階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\iff \exists e \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \omega_{p^e N}(F) = \frac{r}{2}$$

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

注意.

- $(3)_p$ について,
 $(1)_p$ の $n \geq r$ が 外せれば, フィルトレーションを用いて可能.
- 準備として先に次を示していた.

$$(2)'_p \text{ (2016, Forum Math.)} \quad p \geq 5, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N,$$

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}: p\text{-階数 } r \text{ の法 } p^m \text{ 特異モジュラー}$$

$$\implies 2k - r \equiv 0 \pmod{(p-1)p^{m-1}} \quad (\implies r: \text{偶数})$$

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

最近の結果と取組中の課題.

- ベクトル値の場合に $(2)'_p$ を示した.
- ベクトル値の場合に $(1)_p$ を示そうと考察中.

(構想はほぼできている?)

ご清聴ありがとうございました！