Siegel モジュラー形式と法 p 特異性

福岡工業大学・菊田俊幸

Siegel モジュラー形式と法 p 特異性

(Boecherer氏との共同研究)

1. よく言われる動機
2. 定義と記号
3. 特異モジュラー形式
4. 法 p^m 特異モジュラー形式

1.　よく言われる動機

■ 1. よく言われる動機

なぜモジュラー形式を調べるのか？

モジュラー形式の Fourier 係数には，整数論的な関数が現れる．

モジュラー形式を調べることで，それらの性質が分かる．

例えば

- 約数のベキ和 ⋯ $\sigma_m(t) = \sum_{0<d|t} d^m$
- 2 次形式の表現数 ⋯ $\sharp\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = t\}$
- Riemann ゼータ関数 ⋯ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

など

■ 1. よく言われる動機

m 変数の 2 次形式 $\longleftrightarrow$ サイズ m の半整数対称行列

$$x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 5yz + 3zx$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

➡ $\Lambda_m := \{T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{Q}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z},\ 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ とおくと,

これは m 変数の整数係数の 2 次形式の集合と考えられる.

1. よく言われる動機

整数論的な興味の対象

$0 < S \in \Lambda_m$ に対する ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} = t$ の整数解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m$ の個数

$$\text{i.e.,} \quad A(S,t) := \sharp\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid {}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} = t\}$$

を調べよ.

$$S > 0 \quad \Longrightarrow \quad A(S,t) < \infty$$

(固有値が全て正)

$$0 < S \in \Lambda_m, \quad \theta_S := \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m} q^{{}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S,t)q^t \qquad \text{(数列の母関数)}$$

を考える. テータ級数とよぶ. $\quad (q := e^{2\pi i z}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0)$

■ 1. よく言われる動機

$$\theta_S := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^m} q^{{}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S,t)q^t$$

$$q := e^{2\pi i z}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0$$

➡ θ_S は正則関数を定め, ある種のモジュラー形式になる!

$$\theta_S\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \pm(cz+d)^{m/2}\cdot\theta_S(z)$$

$$\left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ with } c \equiv 0 \bmod L_S\right)$$

S によって決まる
自然数 (レベルという)

➡ モジュラー形式を調べれば, $A(S,t)$ が分かる (場合がある)!

■ 1. よく言われる動機

例. $S=1_4$ の場合.

$$A(1_4,t)=\sharp\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=t\}$$

$\theta_{1_4}=\sum_{t=0}^{\infty}A(1_4,t)q^t$ は 重さ 2 で'レベル 4' のモジュラー形式.

$M_2(4)$ と表す.

色々調べると, $M_2(4)=\langle E_2,\Delta_2\rangle_{\mathbb{C}}$,

$$E_2=1+8\sum_{t=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{\substack{0<d|t\\ 4\nmid d}}d\Bigr)q^t,\qquad \Delta_2=\sum_{\substack{t=1\\ t:\mathrm{odd}}}^{\infty}\Bigl(\sum_{0<d|t}d\Bigr)q^t.$$

■ 1. よく言われる動機

$\theta_{1_4} = aE_2 + b\Delta_2$ ➡ $a = 1,\ b = 0$ ➡ $\theta_{1_4} = E_2$

定数項と q の係数を比較して，$A(1_4, 0) = 1,\ A(1_4, 1) = 8$ より

$$\begin{cases} a = 1 \\ 8a + b = 8 \end{cases}$$

(Jacobi)

➡ $$A(1_4, t) = 8 \sum_{\substack{0<d|t \\ 4\nmid d}} d$$

特に ➡ $A(1_4, t) \geq 1,\ \forall t \geq 1$

(Lagrange)

Siegel による多変数化.

より一般的な問題

$0 < S \in \Lambda_m,\ 0 \leq T \in \Lambda_n$ に対して,

方程式 ${}^t XSX = T$ の整数解 $X \in \mathbb{Z}^{m,n}$ の個数,

$$\text{i.e.,}\quad A(S,T) := \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{m,n} \mid {}^t XSX = T\}$$

を調べよ.

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \mathrm{tr}({}^t XSXZ)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S,T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

■ 1. よく言われる動機

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X\in\mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \mathrm{tr}({}^tXSXZ)} = \sum_{0\leq T\in\Lambda_n} A(S,T)e^{2\pi i\mathrm{tr}(TZ)}$$

$$Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}), \quad Y > 0$$

➡ $\theta_S^{(n)}$ は正則関数を定め, n 次の Siegel モジュラー形式になる!

$$\theta_S^{(n)}((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \pm\det(CZ+D)^{m/2}\cdot\theta_S^{(n)}(Z)$$

$$\left(\forall \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \text{ with } C \equiv 0_n \bmod L_S\right)$$

$A, B, C, D \in M_n(\mathbb{Z})$

$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ $(\subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z}))$ は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の ‘拡張’

➡ Siegel モジュラー形式を調べれば, $A(S,T)$ が分かる (場合がある)!

■ 1. よく言われる動機

- Jacobi の公式ように, 具体的に書ける場合も勿論あるが稀

  (モジュラー形式環の構造が分かっていればできる)

- 一般の $A(S,T)$ を記述する公式は到底望めない

しかし, $A(S,T)$ たちの “ある種の平均” を取れば,

ある程度一斉に書けるというのが次の Siegel の主定理

■ 1. よく言われる動機

$$A,\ B \in \Lambda_m,\quad A \sim B \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \ \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\ \exists U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \text{ s.t. } {}^tUAU = B$$

Siegelの主定理(1930年代)

$8 \mid m,\ \ S_1, \cdots, S_h \in \Lambda_m$: 正定値, $\det 2S_i = 1$ (レベル 1),

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ による類別の同値類の代表系

(i.e., $S_i \not\sim S_j \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$)

ジーナステータ級数

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{\theta_{S_j}^{(n)}}{A(S_j, S_j)} = \text{次数 } n,\ \text{重さ } \frac{m}{2} \text{ の “Eisenstein 級数”}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{h} \frac{A(S_j, T)}{A(S_j, S_j)} = \text{“Eisenstein 級数” の } (T \text{ に対する}) \text{Fourier 係数}$$

Sieel–Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式.

- 部分的には Siegel 自身が計算
- レベル 1 ⋯ 桂田 (1999)
- 奇数レベル, 指標つき ⋯ 竹森 (2015)
- 奇素数レベル, 指標なし ⋯ 軍司 (2022)

次数は一般

間には,

Maass, Eichler–Zagier, 水野, 竹森などの次数 2 の場合の結果あり.

■ 1. よく言われる動機

モジュラー形式は,

整数論的な問題に解析的なアプローチを与えるもの

ただし, 私の場合は …

モジュラー形式を調べること自体が目的

2.　定義と記号

■ 2. 定義と記号

- Siegel 上半空間:

$$\mathbb{H}_n := \{Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid Y > 0\}$$

➡ $\mathbb{H}_1$: 複素上半平面

- Siegel モジュラー群 Γ_n:

$$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \{\ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_nM = J_n\}\ \left(J_n := \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| A^tD - B^tC = 1_n,\ A^tB,\ C^tD \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

➡ $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

■ 2. 定義と記号

- レベル $N \in \mathbb{N}$ の合同部分群:

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \;\middle|\; C \equiv 0_n \bmod N \right\}$$

$\Rightarrow$ $\Gamma_0^{(n)}(1) = \Gamma_n$

- 一次分数変換:

$$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}_n,$$

$$Z \in \mathbb{H}_n, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

- $F : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則関数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$: mod N の指標,

F: 重さ k, 指標 χ, $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の **Siegel** モジュラー形式

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad F(M\langle Z\rangle) = \chi(\det D)\det(CZ+D)^k F(Z)$$

■ 2. 定義と記号

- モジュラー形式の空間:

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) :=\{\text{ 重さ } k,\text{ 指標 } \chi,\ \Gamma_0^{(n)}(N) \text{ の Siegel モジュラー形式 }\}$$

- Fourier 展開:

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) \quad \Longrightarrow \quad F = \sum_{0\leq T\in\Lambda_n} a_F(T)q^T \quad (q^T := e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)})$$

- $R \subset \mathbb{C}$: 部分環,

$$M_k(\Gamma,\chi)_R := \{F \in M_k(\Gamma,\chi) \mid a_F(T) \in R \text{ for } \forall T \in \Lambda_n\}$$

■ 2. 定義と記号

次数 2 の Fourier 展開の形.

$$0 \leq T = \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} \in \Lambda_2, \quad \text{i.e.,} \quad 0 \leq m,\ n \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad mn - r^2/4 \geq 0$$

$E_4 \in M_4(\Gamma_2)$: 重さ 4 の "Eisenstein 級数" $\Longrightarrow$

$$E_4 = 1 + 240q^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} + 240q^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} + 30240q^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} + 240q^{\begin{pmatrix} 1 & -2/2 \\ -2/2 & 1 \end{pmatrix}}$$
$$+ 13440q^{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}} + 13440q^{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}} + 240q^{\begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix}} + \cdots$$

$$= 1 + 240q_1 + 240q_2 + 30240q_1q_2 + 240q_1q_2\zeta^{-2} + 13440q_1q_2\zeta^{-1}$$
$$+ 13440q_1q_2\zeta + 240q_1q_2\zeta^2 + \cdots$$

$$\left(q_1 := e^{2\pi i z_{11}},\ q_2 := e^{2\pi i z_{22}},\ \zeta := e^{2\pi i z_{12}}, \quad \left(\begin{smallmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2\right)$$

■ 2. 定義と記号

- テータ級数のレベル L_S と指標 χ_S:

m : 偶数, $0 < S \in \Lambda_m$,

$$L_S := \min\{N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid N(2S)^{-1} \in 2\Lambda_m\},$$

$$\chi_S(d) = \mathrm{sign}(d)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det 2S}{|d|} \right)$$

$\Rightarrow$ $\chi_S^2 = \mathbf{1}_{\det 2S}$ (2 次指標)

※ $L_S \mid \det 2S \mid L_S^m$ $\Longrightarrow$ $\det 2S$ と L_S の素因子は同じ

$\Longrightarrow$ χ_S: mod L_S の指標

3. 特異モジュラー形式

Freitag による特異モジュラー形式の理論.

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$: 特異 (*singular*) モジュラー形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_F(T) = 0$ for $\forall T$ with $\mathrm{rank}(T) = n$

$r := \max\{\mathrm{rank}(T) \mid a_F(T) \neq 0\}$: (特異) 階数

$$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_F(T) q^T$$

$$= \cdots + \underbrace{\boxed{\sum_{\mathrm{rank}(T)=r} a_F(T) q^T}}_{\neq 0} + \underbrace{\boxed{\sum_{\mathrm{rank}(T)=r+1} a_F(T) q^T + \cdots}}_{= 0}$$

特異モジュラー形式の例.　r : 偶数,　$0 < S \in \Lambda_r$,　$n > r$

$$\theta_S^{(n)} = \sum_{0 \le T \in \Lambda_n} A(S,T) q^T \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(L_S), \chi_S)$$

$$r < \mathrm{rank}(T) \quad \Longrightarrow \quad A(S,T) = \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{r,n} \mid {}^tXSX = T\} = 0$$

$$\mathrm{rank}({}^tXSX) \le \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(S)\} \le r$$

$\Longrightarrow$　$\theta_S^{(n)}$: 階数 r の特異モジュラー　　(重さ $(= \frac{r}{2}) < \frac{n}{2}$ に注意!)

(Freitag の理論) テータ級数以外にはない!

■ 3. 特異モジュラー形式

定理F（Freitag, 1970年代）

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$$

(0) F: 特異モジュラー $\Longrightarrow$ $\chi^2 = \mathbf{1}_N$

以下，$\chi^2 = \mathbf{1}_N$.

(1) F: 特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longrightarrow$ $F = \displaystyle\sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$

(3) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k = \dfrac{r}{2}$

■ 3. 特異モジュラー形式

今日の話

定理 F の法 p^m 類似

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a_F(T) \equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) > r,$$

$$\exists T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) = r \text{ s.t. } a_F(T) \not\equiv 0 \bmod p$$

$$F = \sum_{0 \le T \in \Lambda_{n+r}} a_F(T) q^T \qquad (p\text{-integral})$$

$$= \cdots + \underbrace{\boxed{\sum_{\mathrm{rank}(T)=r} a_F(T) q^T}}_{\not\equiv\ 0 \bmod p} + \underbrace{\boxed{\sum_{\mathrm{rank}(T)=r+1} a_F(T) q^T + \cdots}}_{\equiv\ 0 \bmod p^m}$$

法 p^m 特異モジュラー形式の例.

例 1. 通常の特異モジュラー形式は、法 p^m 特異モジュラー形式

例 2. r: 偶数, $0 < S \in \Lambda_r$: レベル p, $n > r$

$\Longrightarrow$ $\theta_S^{(n)} \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_S)_{\mathbb{Z}}$: 階数 r の特異モジュラー

$(\chi_S = \mathbf{1}_p$ or χ_p $(\chi_p := (\frac{*}{p}))$

$\Longrightarrow$ $\exists G_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ s.t. $G_m \equiv \theta_S^{(n)} \mod p^m$

$\Longrightarrow$ G_m は特異モジュラー ではない が, p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

∵ k_m は大きくなり, $k_m > n/2$

(当初からの予想) このタイプのものしか存在しないだろう

真の重さ (フィルトレーション).

$$\exists E \in M_{p-1}(\Gamma_n) \text{ s.t. } E \equiv 1 \bmod p \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{F}_{\text{重さ } k} \equiv \underbrace{FE}_{\text{重さ } k+p-1} \bmod p$$

➡ 重さの異なるモジュラー形式で合同なものはいくらでもある！

➡ それらの中の最小の重さを考えるべき!

フィルトレーション

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}, \quad m\text{: fix}$$

$$\omega_{p^e N}(F) := \min\{l \mid \exists G \in M_l(\Gamma_0^{(n+r)}(p^e N), \chi \cdot \chi_p^t) \text{ s.t. } F \equiv G \bmod p^m\}$$

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

定理 (Boecherer-K)

$(0)_p$ (2024, RNT) $p \geq 5$,

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$: 法 "$p$" 特異モジュラー

mod $p\mathbb{Z}[\chi]$

$$\Longrightarrow \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$$

$(2)_p$ (MZ, to appear) $p > r+1$, $n \geq r$, $\chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S \mid p^e N \\ \chi_S = \chi \cdot \chi_p^t}} c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p^m \quad (C_S \in \mathbb{Z}_{(p)})$$

■ 4. 法 p^m 特異モジュラー形式

ただし, $t \in \mathbb{Z}$ は $k - r/2 = \frac{p-1}{2} \cdot t \cdot p^{m-1}$ を満たす数.

(次ページの $(3)'_p$ 参照)

$(2)_p$ の系

$(3)_p \quad p > r+1, \quad n \geq r, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longleftrightarrow \quad \exists e \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \omega_{p^e N}(F) = \frac{r}{2}$$

4. 法 p^m 特異モジュラー形式

注意.

- $(1)_p$ について,

  $(2)_p$ の $n \geq r$ が外せれば, フィルトレーションを用いて可能.

- 準備として先に次を示していた.

$(3)'_p$ (2016, Forum Math.) $\quad p \geq 5, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N,$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad 2k - r \equiv 0 \bmod (p-1)p^{m-1} \qquad (\Longrightarrow \quad r\text{: 偶数})$$

最近の結果と取組中の課題.

- ベクトル値の場合に $(3)'_p$ を示した.
- ベクトル値の場合に $(2)_p$ を示そうと考察中.

(構想はほぼできている？)

ご清聴ありがとうございました！