法 p^m 特異モジュラー形式の理論について

福岡工業大学・菊田俊幸

法 p^m 特異モジュラー形式の理論について

(Boecherer氏との共同研究)

1. 一般に言われる動機
2. 特異モジュラー形式
3. 法 p^m 特異モジュラー形式
4. p 進Eisestein級数への応用

1. 一般に言われる動機

1. 一般に言われる動機

なぜモジュラー形式を調べるのか？

モジュラー形式の Fourier 係数には，整数論的な関数が現れる．

モジュラー形式を調べることで，それらの性質が分かる．

例えば

- 約数のベキ和 $\cdots$ $\sigma_m(t) = \sum_{0<d|t} d^m$
- 2 次形式の表現数 $\cdots$ $\sharp\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = t\}$
- Riemann ゼータ関数 $\cdots$ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

など

■ 1. 一般に言われる動機

m 変数の 2 次形式 $\longleftrightarrow$ サイズ m の半整数対称行列

$$x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 5yz + 3zx$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

➡ $\Lambda_m := \{T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{Q}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z},\ 2t_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ とおくと，

これは m 変数の整数係数の 2 次形式の集合と考えられる．

■ 1. 一般に言われる動機

整数論的な興味の対象

$0 < S \in \Lambda_m$ に対する ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} = t$ の整数解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m$ の個数

$$\text{i.e.,} \quad A(S,t) := \sharp\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m \mid {}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} = t\}$$

を調べよ.

$$S > 0 \quad \Longrightarrow \quad A(S,t) < \infty$$

(固有値が全て正)

$$0 < S \in \Lambda_m, \quad \theta_S := \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m} q^{{}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S,t)q^t \qquad (\text{数列の母関数})$$

を考える. テータ級数とよぶ. $\quad (q := e^{2\pi i z}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0)$

1. 一般に言われる動機

$$\theta_S := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^m} q^{{}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x}} = \sum_{t=0}^{\infty} A(S,t)q^t$$

$$q := e^{2\pi i z}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad y > 0$$

➡ θ_S は正則関数を定め, ある種のモジュラー形式になる!

$$\theta_S\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \pm(cz+d)^{m/2}\cdot\theta_S(z)$$

$$\left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ with } c \equiv 0 \bmod L_S\right)$$

S によって決まる
自然数 (レベルという)

➡ モジュラー形式を調べれば, $A(S,t)$ が分かる (場合がある)!

1. 一般に言われる動機

例. $S = 1_4$ の場合.

➡ $A(1_4, t) = \sharp\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t\}$

$$\theta_{1_4} = \sum_{t=0}^{\infty} A(1_4, t) q^t$$ は 重さ 2 で 'レベル 4' のモジュラー形式.

$M_2(4)$ と表す.

➡ 色々調べると, $M_2(4) = \langle E_2, \Delta_2 \rangle_{\mathbb{C}}$,

$$E_2 = 1 + 8\sum_{t=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{\substack{0<d|t \\ 4\nmid d}} d\Bigr)q^t, \qquad \Delta_2 = \sum_{\substack{t=1 \\ t:\mathrm{odd}}}^{\infty}\Bigl(\sum_{0<d|t} d\Bigr)q^t.$$

1. 一般に言われる動機

$\theta_{1_4} = aE_2 + b\Delta_2$ → $a = 1,\ b = 0$ → $\theta_{1_4} = E_2$

定数項と q の係数を比較して, $A(1_4,0)=1,\ A(1_4,1)=8$ より

$$\begin{cases} a = 1 \\ 8a + b = 8 \end{cases}$$

(Jacobi)

$$A(1_4,t) = 8\sum_{\substack{0<d|t \\ 4\nmid d}} d$$

特に

$$A(1_4,t) \geq 1,\ \forall t \geq 1$$

(Lagrange)

Siegel による多変数化

より一般的な問題

$0 < S \in \Lambda_m$, $0 \leq T \in \Lambda_n$ に対して,

方程式 ${}^tXSX = T$ の整数解 $X \in \mathbb{Z}^{m,n}$ の個数,

$$\text{i.e.,}\quad A(S,T) := \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{m,n} \mid {}^tXSX = T\}$$

を調べよ.

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \mathrm{tr}({}^tXSXZ)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S,T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

■ 1. 一般に言われる動機

$$\theta_S^{(n)} := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} e^{2\pi i \mathrm{tr}({}^t XSXZ)} = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S,T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

$$Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}), \quad Y > 0$$

➡ $\theta_S^{(n)}$ は正則関数を定め, n 次の Siegel モジュラー形式になる!

$$\theta_S^{(n)}((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \pm \det(CZ+D)^{m/2} \cdot \theta_S^{(n)}(Z)$$

$$\left(\forall \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \text{ with } C \equiv 0_n \bmod L_S\right)$$

$A,\ B,\ C,\ D \in M_n(\mathbb{Z})$

$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ $(\subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z}))$ は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の ‘拡張’

➡ Siegel モジュラー形式を調べれば, $A(S,T)$ が分かる (場合がある)!

1. 一般に言われる動機

例. $A,\ B \in \Lambda_m$

$$A \sim B \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \text{ s.t. } {}^tUAU = B$$

Siegelの主定理(1930年代)

$8 \mid m,\quad S_1, \cdots, S_h \in \Lambda_m$: 正定値, $\det 2S_i = 1$ (レベル 1),

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ による類別の同値類の代表系

(i.e., $S_i \not\sim S_j \bmod \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$)

ジーナステータ級数

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{\theta_{S_j}^{(n)}}{A(S_j, S_j)} = \text{次数 } n, \text{ 重さ } \frac{m}{2} \text{ の “Eisenstein 級数”}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{h} \frac{A(S_j, T)}{A(S_j, S_j)} = \text{“Eisenstein 級数” の } (T \text{ に対する}) \text{Fourier 係数}$$

2. 特異モジュラー形式

■ 2. 特異モジュラー形式

- Siegel 上半空間:

$$\mathbb{H}_n := \{Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid Y > 0\}$$

➡ $\mathbb{H}_1$: 複素上半平面

- Siegel モジュラー群 Γ_n:

$$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \{\ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^tMJ_nM = J_n\}\ \left(J_n := \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A{}^tD - B{}^tC = 1_n,\ A{}^tB,\ C{}^tD \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

➡ $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

■ 2. 特異モジュラー形式

- レベル $N \in \mathbb{N}$ の合同部分群:

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \;\middle|\; C \equiv 0_n \bmod N \right\}$$

- 一次分数変換:

$$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}_n,$$

$$Z \in \mathbb{H}_n, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

- $F : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則関数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$: hom (mod N の指標),

  F: 重さ k, 指標 χ, $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の **Siegel モジュラー形式**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad F(M\langle Z\rangle) = \chi(\det D)\det(CZ+D)^k F(Z)$$

■ 2. 特異モジュラー形式

- モジュラー形式の空間:

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) :=\{\text{ 重さ } k,\text{ 指標 } \chi,\ \Gamma_0^{(n)}(N) \text{ の Siegel モジュラー形式 }\}$$

- Fourier 展開:

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) \quad \Longrightarrow \quad F = \sum_{0 \le T \in \Lambda_n} a_F(T) q^T \quad (q^T := e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)})$$

- $R \subset \mathbb{C}$: 部分環,

$$M_k(\Gamma,\chi)_R := \{F \in M_k(\Gamma,\chi) \mid a_F(T) \in R \text{ for } \forall T \in \Lambda_n\}$$

■ 2. 特異モジュラー形式

- テータ級数のレベル L_S と指標 χ_S:

m： 偶数，　$0 < S \in \Lambda_m$,

$$L_S := \min\{N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid N(2S)^{-1} \in 2\Lambda_m\},$$

$$\chi_S(d) = \mathrm{sign}(d)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det 2S}{|d|} \right)$$

⇨ $\chi_S^2 = \mathbf{1}_{\det 2S}$ (2 次指標)

※　$L_S \mid \det 2S \mid L_S^m$　$\Longrightarrow$　$\det 2S$ と L_S の素因子は同じ

$\Longrightarrow$　χ_S: mod L_S の指標

Freitag による特異モジュラー形式の理論

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$: 特異 (*singular*) モジュラー形式

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a_F(T) = 0 \text{ for } \forall T \text{ with } \mathrm{rank}(T) = n$$

$$r := \max\{\mathrm{rank}(T) \mid a_F(T) \neq 0\}\text{: (特異) 階数}$$

特異モジュラー形式の例.　r : 偶数,　$0 < S \in \Lambda_r$,　$n > r$

$$\theta_S^{(n)}(Z) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} A(S,T) q^T \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(L_S), \chi_S)$$

■ 2. 特異モジュラー形式

$$r < \mathrm{rank}(T) \quad \Longrightarrow \quad A(S,T) = \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{r,n} \mid {}^tXSX = T\} = 0$$

$\mathrm{rank}({}^tXSX) \leq \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(S)\} \leq r$

$\Longrightarrow$ $\theta_S^{(n)}$: 階数 r の特異モジュラー

(重さ $(= \frac{r}{2}) < \frac{n}{2}$ に注意!)

テータ級数以外にあるか?

ない!

■ 2. 特異モジュラー形式

定理F（Freitag, 1970年代）

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$$

(0) F: 特異モジュラー $\Longrightarrow$ $\chi^2 = \mathbf{1}_N$

以下，$\chi^2 = \mathbf{1}_N$.

(1) F: 特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k = \dfrac{r}{2}$

(3) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longrightarrow$ $F = \displaystyle\sum_{\substack{S \in \Lambda_r / \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$

今日の話

定理 F の法 p^m 類似（とその応用）

3. 法 p^m 特異モジュラー形式

■ 3. 法 p^m 特異モジュラー形式

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a_F(T) \equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) > r,$$

$$\exists T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) = r \text{ s.t. } a_F(T) \not\equiv 0 \bmod p$$

例 1. 通常の特異モジュラー形式は、法 p^m 特異モジュラー形式

例 2. r: 偶数, $0 < S \in \Lambda_r$: レベル p, $n > r$

$\Longrightarrow$ $\theta_S^{(n)} \in M_{r/2}(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_S)_{\mathbb{Z}}$: 階数 r の特異モジュラー $(\chi_S = \mathbf{1}_p \text{ or } \chi_p)$

$\Longrightarrow$ $\forall m, \exists G_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ s.t. $G_m \equiv \theta_S^{(n)} \bmod p^m$ $\quad (\chi_p := (\frac{*}{p}))$

$\Longrightarrow$ G_m は特異モジュラーではないが, p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

■ 3. 法 p^m 特異モジュラー形式

定理 1 (Boecherer-K)

$(2)'_p$ (2016 Forum Math.) $\quad p \geq 5, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N,$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad 2k - r \equiv 0 \bmod (p-1)p^{m-1} \quad (\Longrightarrow \quad r\text{: 偶数})$$

(参考)

定理 F $\quad F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$

(0) F: 特異モジュラー $\Longrightarrow \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$

(1) F: 特異モジュラー $\Longleftrightarrow \quad k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longleftrightarrow \quad k = \dfrac{r}{2}$

(3) F: 階数 r の特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad F = \sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S \mid N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$$

■ 3. 法 p^m 特異モジュラー形式

定理 1 (Boecherer-K)

$(3)_p$ (2023, ArXiv) $\quad p > r+1, \quad n \geq r, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r / \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | p^e N \\ \chi_S = \chi \cdot \chi_p^t}} c_S \theta_S^{(n+r)} \mod p^m \qquad (C_S \in \mathbb{Z}_{(p)})$$

ただし, $t \in \mathbb{Z}$ は $k - r/2 = \frac{p-1}{2} \cdot t \cdot p^{m-1}$ を満たす数.

(参考)

定理 F $\quad F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$

(3) F: 階数 r の特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad F = \sum_{\substack{S \in \Lambda_r / \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ L_S | N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$$

3. 法 p^m 特異モジュラー形式

定理 1 (Boecherer-K)

$(0)_p$ (2024, RNT) $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$: 法 "$p$" 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$$

$\boxed{\mathrm{mod}\ p\mathbb{Z}[\chi]}$

注意. $(2)'_p$ について,

$F : p$-階数 r の法 p^m 特異モジュラー $\Longrightarrow$ $2k - r \equiv 0 \bmod (p-1)p^{m-1}$

$\not\Longleftarrow$

$\boxed{k = \dfrac{r}{2}}$

'重さ' による特徴付けは不可能！

$\because$ F: 法 p 特異モジュラー, $\exists E \in M_{p-1}(\Gamma_n)$ s.t. $E \equiv 1 \bmod p$

$\Longrightarrow$ $FE \equiv F \bmod p$ $\Longrightarrow$ 重さが増える！

定理 F $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$

(0) F: 特異モジュラー $\Longrightarrow$ $\chi^2 = \mathbf{1}_N$

(1) F: 特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k = \dfrac{r}{2}$

3. 法 p^m 特異モジュラー形式

しかし, ‘フィルトレーション’ を用いれば, $(3)_p$ から $(2)_p$ が従う.

$$\omega_{p^e N}(F) := \min\{k \mid \exists G \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(p^e N), \chi_p^t) \text{ s.t. } F \equiv G \bmod p^m\}$$

系

$(2)_p$ $\quad p > r+1, \quad n \geq r, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longleftrightarrow \quad \exists e \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \omega_{p^e N}(F) = \frac{r}{2}$$

定理 F $\quad F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$

(1) F: 特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $k = \dfrac{r}{2}$

$(1)_p$ について, 重さによる特徴付は同様に不可能だが,

$(3)_p$ の $n \geq r$ が外せれば, フィルトレーションを用いて可能.

3. 法 p^m 特異モジュラー形式

$(3)_p$ について,

- e については, 具体的には分からない.
- $r=2,\ N=1,\ k=\frac{p+1}{2}$(可能な重さの最小) のときは, $e=1$ が示せる.

$$\Rightarrow \quad F \equiv \sum_{\substack{S\in\Lambda_2/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ L_S|p \\ \chi_S=\chi\cdot\chi_p^t}} c_S\theta_S^{(n+2)} \bmod p^m \qquad (C_S\in\mathbb{Z}_{(p)})$$

$(0)_p$ について,

$\chi^2\neq\mathbf{1}_N$ の法 "p" 特異モジュラー形式

$F\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$ は存在する.

定理 F　$F\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$

(0) F: 特異モジュラー $\Longrightarrow$ $\chi^2=\mathbf{1}_N$

4. p進Eisnstein級数への応用

Eisenstein 級数

$k \geq 4$: 偶数

$$E_k := \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k} \in M_k(\Gamma_1)_{\mathbb{Q}}$$

$$\Longrightarrow \quad E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{t=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{0<d|t} d^{k-1} \Bigr) q^t$$

(B_k: k 番目の Bernoulli 数)

$$G_k := \frac{B_k}{2k} E_k \text{ とおく.}$$

■ 4. p進Eisenstein級数への応用

Serre の論文より，

$$p \geq 3, \qquad k_m := k + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$$

$$G_{k_m} = \frac{B_{k_m}}{2k_m} - \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|t} d^{k_m-1}\right)q^t$$

Kummer　　Euler

$$\equiv (1-p^{k-1})\frac{B_k}{2k} - \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0<d|t \\ p\nmid d}} d^{k-1}\right)q^t \bmod p^m$$

右辺は丁度，レベル p，重さ k の Hecke の Eisenstein 級数

➡ $\displaystyle\lim_{m\to\infty} E_{k_m} =$ レベル p，重さ k の Hecke の Eisenstein 級数

$$\in M_k(\Gamma_0(p))$$

Siegel-Eisenstein 級数

$k > n+1$: 偶数

$$\Gamma_\infty := \{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n \mid C = 0_n \}$$

$$E_k^{(n)} := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_n} \frac{1}{\det(CZ+D)^k} \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$$

■ 4. p進Eisenstein級数への応用

定理

$p \geq 5$: 正則素数

(長岡 2000) $k_m := 1 + \frac{p-1}{2} p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \implies$

$$\lim_{m \to \infty} E_{k_m}^{(n)} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_1(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_p)$$

(p 進極限)

階数 2 の特異モジュラー

$(\chi_p := (\frac{*}{p}))$

(長岡-K 2008, 桂田–長岡 2023) $k'_m := 2 + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \implies$

$$\lim_{m \to \infty} E_{k'_m}^{(n)} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))$$

(p 進極限)

階数 4 の特異モジュラー

■ 4. p進Eisenstein級数への応用

彼らの証明では, 右辺の Fourier 係数を計算して,

計算は物凄く大変!

左辺の p 進極限との一致を示す.

しかし,

$E^{(n)}_{k_m}$: p-階数 2 の法 $p^{c(m)}$ 特異モジュラー

$E^{(n)}_{k'_m}$: p-階数 4 の法 $p^{c'(m)}$ 特異モジュラー

(by FC of Eisen)

が簡単に分かるので, 我々の理論が使えそう!

➡ 重さに関して拡張した上で, 簡単な別証を与えることが可能.

4. p進Eisenstein級数への応用

定理 2 (Boecherer-K (2024 Manuscripta Math.))

$p > 2k+1$: 正則素数

$k_m := k + \frac{p-1}{2}p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{k_m} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_p)$$

(p 進極限)

階数 $2k$ の特異モジュラー

$k'_m := k + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{k'_m} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))$$

(p 進極限)

階数 $2k$ の特異モジュラー

ご清聴ありがとうございました！