法 p^m 特異モジュラー形式の理論とその応用

福岡工業大学・菊田俊幸

法 p^m 特異モジュラー形式の理論とその応用

(Boecherer氏との共同研究)

1. 序
2. 定義と記号
3. 結果
4. 応用
5. 証明の概略（一部のみ）

1. 序

■ 1. 序

Serre の 1973 年の論文より,

定理

$$f=\sum_{t\geq 0} a_f(t)q^t \ : \text{重さ } k \text{ のモジュラー形式} \quad (k\not\equiv 0 \bmod p-1)$$

$$a_f(t)\equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall t\geq 1 \quad \Longrightarrow \quad a_f(0)\equiv 0 \bmod p^m$$

$k-k'=(p-1)p^{m-1}\cdot s$

$f:=E_k-E_{k'}E_{p-1}^{sp^{m-1}}$ に適用 $(E_{p-1}\equiv 1 \bmod p)$

Eisenstein級数に適用

$$E_k=\frac{\zeta(1-k)}{2}+\sum_{t=1}^{\infty}\Big(\sum_{0<d|t} d^{k-1}\Big)q^t$$

$$k\equiv k' \bmod (p-1)p^{m-1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{0<d|t} d^{k-1}\equiv \sum_{0<d|t} d^{k'-1} \bmod p^m$$

$$\Longrightarrow \quad \zeta(1-k)\equiv\zeta(1-k') \bmod p^m$$

➡ p 進ゼータの構成!

問

Siegel モジュラー形式への多変数化は言えるか?

$$F = \sum_{0 \le T:\ n\times n\ \mathrm{mat}} a_F(T) q^T \qquad (q^T := e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}),$$

$$a_F(T) \equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall T \text{ with } \mathrm{rank}(T) = n \Longrightarrow$$

$$a_F(T) \equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall T \text{ with } \mathrm{rank}(T) \le n-1?$$

$\cdots$ NO!

➡ "特異(singular)" モジュラー形式というのが存在する！

- $M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$: 重さ k, 指標 χ $\quad(\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times)$,
  $\Gamma_0^{(n)}(N)$ に対する Siegel モジュラー形式のなす空間

- Fourier 展開:

$$F\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)\quad\Longrightarrow\quad F=\sum_{0\le T\in\Lambda_n}a_F(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)),$$

$$\boldsymbol{e}(x):=e^{2\pi i x},\qquad \Lambda_n:=\{T=(t_{ij})\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q})\mid t_{ii}\in\mathbb{Z},\ 2t_{ij}\in\mathbb{Z}\}.$$

定義

$F\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$: 特異 (*singular*) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_F(T)=0$ for $\forall T$ with $\mathrm{rk}(T)=n$

$r:=\max\{\mathrm{rank}(T)\mid a_F(T)\neq 0\}$: (特異) 階数

特異モジュラー形式の例.

- テータ級数　m : 偶数,　$0 < S \in \Lambda_m$,

$$\theta_S^{(n)}(Z) := \sum_{X \in \mathbb{Z}^{m,n}} \boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(S[X]Z)), \quad S[X] := {}^tXSX$$

$$\in M_{m/2}(\Gamma_0^{(n)}(L_S), \chi_S) \quad (L_S \text{ と } \chi_S \text{ は } S \text{ に依って決まる})$$

$$A(S,T) := \sharp\{X \in \mathbb{Z}^{m,n} \mid S[X] = T\}$$

$$\Longrightarrow \quad \theta_S^{(n)} = \sum_{0 \le T \in \Lambda_n} A(S,T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ))$$

特に

$$m < \mathrm{rank}(T) \quad \Longrightarrow \quad A(S,T) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_S^{(n)}\text{: 階数 } m \text{ の特異モジュラー}$$

定理F (Freitag, 1970年代)

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$

(0) F: 特異モジュラー $\implies \chi^2 = \mathbf{1}_N$

以下, $\chi^2 = \mathbf{1}_N$.

(1) F: 特異モジュラー $\iff k < \dfrac{n}{2}$

(2) F: 階数 r の特異モジュラー $\iff k = \dfrac{r}{2}$

(3) F: 階数 r の特異モジュラー $\implies F = \displaystyle\sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{level}(S) | N \\ \chi_S = \chi}} c_S \theta_S^{(n)}$

今日の話

定理 F の法 p^m 類似（とその応用）

2.　記号と定義

■ 2. 定義と記号

- Siegel 上半空間:

$$\mathbb{H}_n := \{ Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid Y > 0 \}$$

➡ $\mathbb{H}_1$: 複素上半平面

- Siegel モジュラー群 Γ_n:

$$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) = \{ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \mid {}^tM J_n M = J_n \} \ (J_n := \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix})$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A{}^tD - B{}^tC = 1_n,\ A{}^tB,\ C{}^tD \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

➡ $\Gamma_1 = \mathrm{Sp}_1(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

- レベル $N \in \mathbb{N}$ の合同部分群:

$$\Gamma_0^{(n)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \;\middle|\; C \equiv 0_n \bmod N \right\}$$

- 一次分数変換:

$$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathbb{H}_n,$$
$$Z \in \mathbb{H}_n, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

- $F : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則関数, $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$: hom (指標),

F: 重さ k, 指標 χ, $\Gamma_0^{(n)}(N)$ の **Siegel モジュラー形式**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad F(M\langle Z\rangle) = \chi(\det D)\det(CZ+D)^k F(Z)$$

2. 定義と記号

- モジュラー形式の空間:

$$M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) :=\{ \text{ 重さ } k,\ \text{指標 } \chi,\ \Gamma_0^{(n)}(N) \text{ の Siegel モジュラー形式 } \}$$

- Fourier 展開:

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi) \quad \Longrightarrow \quad F = \sum_{0\le T\in\Lambda_n} a_F(T)\boldsymbol{e}(\mathrm{tr}(TZ)),$$

$$\boldsymbol{e}(x) := e^{2\pi i x}$$

- $R \subset \mathbb{C}$: 部分環,

$$M_k(\Gamma,\chi)_R := \{F \in M_k(\Gamma,\chi) \mid a_F(T) \in R \text{ for } \forall T \in \Lambda_n\}$$

2. 記号と定義

- テータ級数のレベル L_S と指標 χ_S:

$$m: \text{偶数}, \quad 0 < S \in \Lambda_m,$$

$$L_S := \min\{N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid N(2S)^{-1} \in 2\Lambda_m\},$$

$$\chi_S(d) = \operatorname{sign}(d)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det 2S}{|d|} \right)$$

2. 記号と定義

定義

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a_F(T) \equiv 0 \bmod p^m \text{ for } \forall T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) > r,$$

$$\exists T \in \Lambda_{n+r} \text{ with } \mathrm{rank}(T) = r \text{ s.t. } a_F(T) \not\equiv 0 \bmod p$$

例 1.　通常の特異モジュラー形式は、法 p^m 特異モジュラー形式

例 2.　m: 偶数,　$0 < S \in \Lambda_m$: レベル p,　$n > m/2$

$\Longrightarrow$　$\theta_S^{(n)} \in M_{m/2}(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_S)_{\mathbb{Z}}$: 階数 m の特異モジュラー

$(\chi_S = \mathbf{1}_p \text{ or } (\frac{*}{p}))$

$\Longrightarrow$　$\exists G \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ s.t. $G \equiv \theta_S^{(n)} \bmod p^m$.

$\Longrightarrow$　G は特異モジュラーではないが, 法 p^m 特異モジュラー

3. 結果

3. 結果

定理 1 (Boecherer-K)

$(2)'_p$ (2016, Forum Math.) $\quad p \geq 5, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N,$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad 2k - r \equiv 0 \bmod (p-1)p^{m-1} \qquad (\Longrightarrow \quad r\text{: 偶数})$$

$(3)_p$ (2023, ArXiv) $\quad p > r+1, \quad n \geq r, \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad F \equiv \sum_{\substack{S \in \Lambda_r/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{L}_S | p^e N \\ \chi_S = \chi \cdot \left(\frac{*}{p}\right)^t}} c_S \theta_S^{(n+r)} \bmod p^m \qquad (C_S \in \mathbb{Z}_{(p)})$$

ただし, $t \in \mathbb{Z}$ は $k - r/2 = \frac{p-1}{2} \cdot t \cdot p^{m-1}$ を満たす数.

3. 結果

定理 1 (Boecherer-K)

$(0)_p$ (2024, RNT) $F \in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$: 法 "$p$" 特異モジュラー

$$\Longrightarrow \quad \chi^2 = \mathbf{1}_N$$

$\boxed{\bmod p\mathbb{Z}[\chi]}$

注意.

$(2)'_p$ について,

$$F : p\text{-階数 } r \text{ の法 } p^m \text{ 特異モジュラー} \quad \Longrightarrow \quad 2k - r \equiv 0 \bmod (p-1)p^{m-1}$$

$$\cancel{\Longleftarrow}$$

$\boxed{k = \frac{r}{2}}$

3. 結果

$(2)_p$ について，

‘重さ’ による特徴付けは不可能！

$\because$ F: 法 p 特異モジュラー， $\exists E \in M_{p-1}(\Gamma_n)$ s.t. $E \equiv 1 \bmod p$
$\Longrightarrow$ $FE \equiv F \bmod p$ $\Longrightarrow$ 重さが増える！

しかし，‘フィルトレーション’ を用いれば，$(3)_p$ から特徴付けが出来る．

F: p-階数 r の法 p^m 特異モジュラー $\Longleftrightarrow$ $\exists e \in \mathbb{N}$ s.t $\omega_{p^e N}(F) = \dfrac{r}{2}$

$(1)_p$ についても，同様に重さによる特徴付けは同様に不可能!

$(3)_p$ の条件 $n \geq r$ が外せれば，フィルトレーションを用いて出来る．

3. 結果

$(3)_p$ について,

- e については, 具体的には分からない.
- $r=2,\ N=1,\ k=\frac{p+1}{2}$(可能な重さの最小) のときは, $e=1$ が示せる.

$$\Rightarrow \quad F \equiv \sum_{\substack{S\in\Lambda_2/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{level}(S)|p \\ \chi_S=\chi\cdot\left(\frac{*}{p}\right)^t}} c_S\theta_S^{(n+2)} \bmod p^m \qquad (C_S\in\mathbb{Z}_{(p)})$$

$(0)_p$ について,

$\chi^2\neq\mathbf{1}_N$ の法 "$\mathfrak{p}$" 特異モジュラー形式

$F\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)_{\mathbb{Z}[\chi]}$ は存在する.

4. 応用

4. 応用

Serre の論文より,

$$p \geq 3, \quad k_m := k + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$$

$$E_{k_m} = \frac{B_{k_m}}{2k_m} - \sum_{t=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{0<d|t} d^{k_m - 1} \Bigr) q^t$$

Kummer　　Euler

$$\equiv (1 - p^{k-1}) \frac{B_k}{2k} - \sum_{t=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{\substack{0<d|t \\ p\nmid d}} d^{k-1} \Bigr) q^t \bmod p^m$$

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m} = \text{レベル } p,\ \text{重さ } k \text{ の Hecke の Eisenstein 級数}$$

$$\in M_k(\Gamma_0(p))$$

$E_k^{(n)}$: 重さ k, 次数 n の Siegel–Eisenstein 級数,

定理

$p \geq 5$: 正則素数

(長岡 2000) $k_m := 1 + \frac{p-1}{2} p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \implies$

$$\lim_{m \to \infty} E_{k_m}^{(n)} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_1(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_p)$$

(p 進極限)

階数 2 の特異モジュラー

(長岡-K 2008, 桂田–長岡 2023) $k'_m := 2 + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \implies$

$$\lim_{m \to \infty} E_{k'_m}^{(n)} = \text{レベル } p \text{ のジーナステータ級数} \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))$$

(p 進極限)

階数 4 の特異モジュラー

■ 4. 応用

定理 2 (Boecherer-K (2024, Manuscripta Math.))

$p > 2k+1$: 正則素数

$k_m := k + \frac{p-1}{2} p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$

$\lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{k_m} =$ レベル p のジーゲルアイゼンシュタイン級数 $\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_p)$

(p 進極限)

$k'_m := k + (p-1)p^{m-1} \in 2\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow$

$\lim_{m\to\infty} E^{(n)}_{k'_m} =$ レベル p のジーゲルアイゼンシュタイン級数 $\in M_k(\Gamma_0^{(n)}(p))$

(p 進極限)

5. 証明の概略

(定理 1 $(3)_p$ のみ)

5. 証明の概略

- mod p の場合の証明 ➡ 帰納法で mod p^m
- 「一次結合」と「レベルの特定」に分けて示す.

(Freitag の方法では, 上手くいかないため)

(一次結合)

Step 1. 法 p^m 特異モジュラー形式の空間に対する "Sturm bound" が存在することを線形代数を使って示す.

$$\exists \mathcal{T}_{n+r,r} = \{T_1, \cdots, T_d\} \subset \Lambda_{n+r} \ (\mathrm{rank}(T_i) > r) \quad \text{s.t.}$$

$$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi), \quad a_F(T) \equiv 0 \bmod p \quad \text{for} \quad \forall T \in \mathcal{T}_{n+r,r}$$

$$\Longrightarrow \quad F\text{: 階数 } r \text{ 以下の法 } p \text{ 特異モジュラー}$$

■ 5. 証明の概略

Step 2.　F からテータ級数を引き算して, 有限回で階数 $r-1$ 以下の法 p 特異モジュラーになることを示す.

$a(T) \equiv 0 \bmod p \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,r-1}$
となるように.

$$G := F - \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \det S < M}} \frac{a_F(S)^*}{A(S,S)} \theta_S^{(n+r)} \in M_{k,r-1}^{p\text{-sing}}(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi) = \{0\}$$

重さと p-階数の関係 (定理 $(2)_p$) から, 0 しかない.

- Sturm bound 使用のために $\widetilde{\theta_S^{(r)}} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi)$ が必要.
- これで $a_G(T) \equiv 0 \bmod p \quad \forall T \in \mathcal{T}_{r,r-1}$ となるのを示すのが難しい!

➡ どちらも Freitag の展開の改良したものから従う.

(レベルの特定)

$$\widetilde{\theta_S^{(r)}} \in \widetilde{M}(\Gamma_0^{(r)}(N), \chi) \quad (S \in \Lambda_r) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathrm{level}(S) \mid p^e N \\ \chi_S = \chi \cdot (\frac{*}{p})^t \end{array}$$

が示せる.

証明には次の定理を示して, 利用.

- q 展開原理 (1 変数は Katz, 多変数は市川) を $\Gamma_1^{(n)}(N) \cap \Gamma_0^{(n)}(p^m)$ の場合へ拡張.

$$\boxed{F \in M_k(\Gamma_1^{(n)}(N))_{\mathbb{Z}_{(p)}} \ (p \nmid N) \quad \Longrightarrow \quad F|\gamma \text{ is } p\text{-integral for } \forall\ \gamma \in \Gamma_n}$$

- テータ級数に関する北岡の変換公式 (1 変数) を多変数の場合に拡張

$(\begin{smallmatrix} a & b \\ \frac{N}{d} & d \end{smallmatrix}) \in \Gamma_1$ に対する変換公式 $((d, \frac{N}{d}) = 1)$ ➡ $(\begin{smallmatrix} a\cdot 1_n & b\cdot 1_n \\ \frac{N}{d}\cdot 1_n & d\cdot 1_n \end{smallmatrix}) \in \Gamma_n$ に対する変換公式

ご清聴ありがとうございました！

（参考）Freitagの証明の上手くいかない点

Fretaig の証明.

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)$: 階数 r の特異モジュラー,

$S \in \Lambda_r^+, \quad a_F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \neq 0, \quad \det S$: minimal $\quad \Longrightarrow$

$$\theta_S^{(n)} \in M(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{level}(S) \mid N,\ \chi_S = \chi$$

テータ級数の $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に対する変換公式などを使用

$$\Longrightarrow \quad G := F - \sum_{\substack{S \in \Lambda_r^+/\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{level}(S) | N}} \frac{a_F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)}{A(S,S)} \theta^{(n+r)}(S):\ \text{特異モジュラー}$$

$$\Longrightarrow \quad G = 0$$

$\mathrm{level}(S) \mid N$ となる全ての $S \in \Lambda_r^+$ に対して, $a_G\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) = 0$

■ 5. 証明の概略

Freitag の方法の mod p 版により,

$F \in M_k(\Gamma_0^{(n+r)}(N), \chi)$: 階数 r の特異モジュラー,

$S \in \Lambda_r^+$, $\quad a_F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right) \not\equiv 0 \bmod p$, $\quad \det S$: minimal $\quad \Longrightarrow$

$\widetilde{\theta_S^{(n)}} \in \widetilde{M}_k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi) \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \mathrm{level}(S) \mid N,\ \chi_S = \chi$

ここが成り立たず, 以降上手くいかない!

➡ 一次結合とレベルの特定に分けて

最初から改良する必要がある!